

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1, a_{n+1} + a_n = 2n (n \in \mathbb{N}^*)$ ，设 $b_n = a_{2n-1}$ 。

(1) 证明： $\{b_n\}$ 为等差数列；

(2) 求数列 $\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\}$ 的前 n 项和 S_n 。

18. (12 分) 2022 年我国将举办第 24 届冬季奥林匹克运动会，为了解某城市居民对冰雪运动的关注情况，随机抽取了该市 100 人进行调查统计，得到 2×2 列联表。

	男	女	合计
关注冰雪运动	40	20	60
不关注冰雪运动	10	30	40
合计	50	50	100

(1) 根据列联表判断，是否有 99% 的把握认为该市居民关注冰雪运动与性别有关；

(2) 从关注冰雪运动的居民中按比例分层抽样抽取 6 人，并从 6 人中随机选 3 人进行采访，记这 3 人中女性人数为 X ，求 X 的分布列与数学期望。

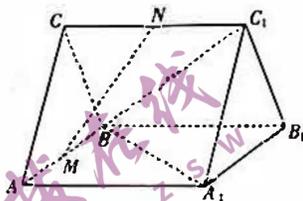
$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.010	0.005	0.001
k_0	3.841	6.635	7.879	10.828

$$\text{附：} K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}, n = a+b+c+d.$$

19. (12 分) 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB=2, AA_1=\sqrt{3}$ ， M 为 AB 中点，点 N 在棱 CC_1 上，且 $MN \parallel$ 平面 A_1BC_1 。

(1) 求证： N 为 CC_1 中点；

(2) 求平面 A_1BC_1 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值。



20. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边为 a, b, c ，且 $4(\cos^2 A - \cos^2 B + \sin^2 C) = \sin B \sin C$ 。

(1) 若 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1$ ，求 $\triangle ABC$ 面积 S ；

(2) 若 $4\vec{BD} = 5\vec{DC}, AD = BD$ ，求 $\frac{\sin C}{\sin B}$ 。

21. (12 分) 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与 $C_2: \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{3} = 1$ 有相同的渐近线，点 $F(2, 0)$ 为 C_1 的右焦点， A, B 为 C_1 的左、右顶点。

(1) 求双曲线 C_1 的标准方程；

(2) 若直线 l 过点 F 交双曲线 C_1 的右支于 M, N 两点，设直线 AM, BN 斜率分别为 k_1, k_2 ，是否存在实数 λ 使得 $k_1 = \lambda k_2$ ？若存在，求出 λ 的值；若不存在，请说明理由。

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = (x-a)e^x - \frac{1}{2}ax^2 + (a^2-a)x$ ，且 $f'(0) = 0$ 。

(1) 判断函数 $f(x)$ 极值点个数并说明理由；

(2) 设 $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$ ，证明： $0 < g(x) < 1$ 。