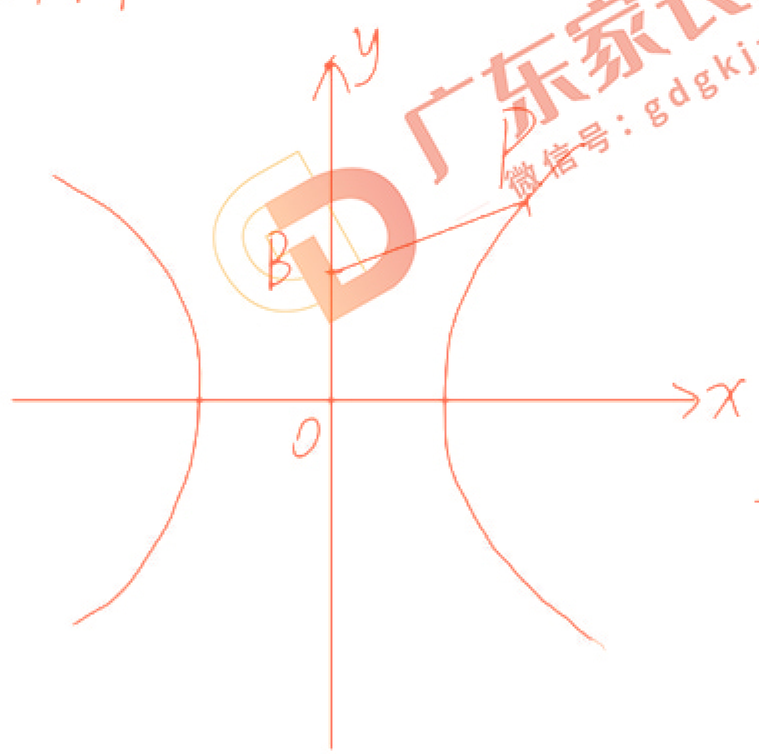
广东一模

7. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$，点 B 的坐标为 $(0,\ b)$，若 C 上的任意一点 P 都满足 $|PB|\geqslant b$，则 C 的离心率取值范围是

A. $\left(1,\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ +\infty\right)$

C. $(1,\ \sqrt{2}]$　　D. $[\sqrt{2},\ +\infty)$

解析



设 $P(x,y)$，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

已知 $x^2+(y-b)^2\geq b^2$ 恒成立.

$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}$.

不妨取 $b=1$，则只需求 a 的范围.

且对 $\forall y\in R$，$x^2=a^2(y^2+1)$

$a^2(y^2+1)+(y-1)^2\geq 1$

$\Rightarrow (a^2+1)y^2-2y+a^2\geq 0$

$\Delta=4-4a^2(a^2+1)\leq 0$

$\Rightarrow a^4+a^2-1\geq 0 \Rightarrow a^2\geq\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

故 $e^2=1+\frac{1}{a^2}\in\left(1,\ 1+\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right]=\left(1,\ \frac{\sqrt{5}+3}{2}\right]$

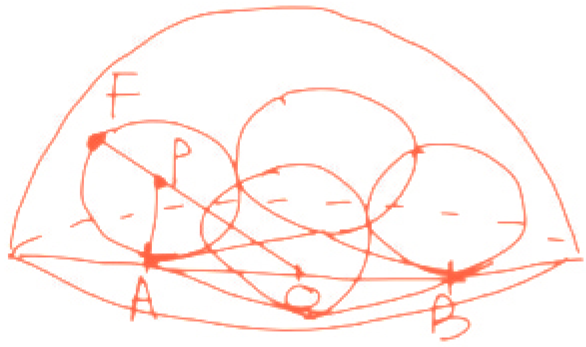
则 $e\in\left(1,\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$，选A.

8. 水平桌面上放置了4个半径为2的小球，4个小球的球心构成正方形，且相邻的两个小球相切. 若用一个半球形的容器罩住四个小球，则半球形容器内壁的半径的最小值为

A. 4　　B. $2\sqrt{2}+2$　　C. $2\sqrt{3}+2$　　D. 6

解析

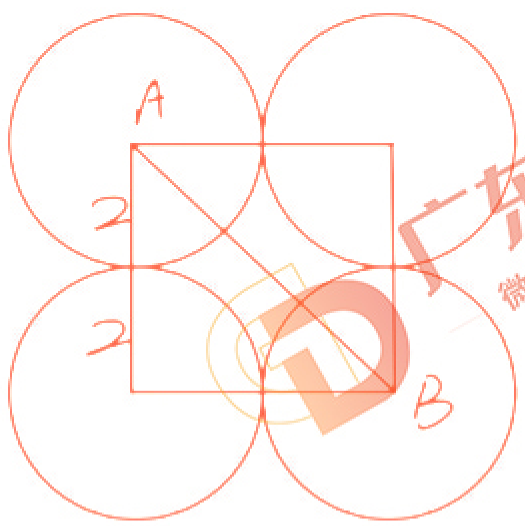
先画个草图感受一下：



恰好罩住时，线段AB在直径上，且 $R-r=|OP|$.

（R为大球半径，$r=2$），再分视角分析

从上往下看：



$|AB|=2|OA|=4\sqrt{2}$

$|OA|=2\sqrt{2} \Rightarrow |OP|=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow R=|OF|=|OP|+r=2+2\sqrt{3}$.

选C.

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，对于给定集合 A，若 $\forall x_1$，$x_2\in\mathbf{R}$，当 $x_1-x_2\in A$ 时都有 $f(x_1)-f(x_2)\in A$，则称 $f(x)$ 是"A 封闭"函数. 则下列命题正确的是

A. $f(x)=x^2$ 是"$[-1,1]$封闭"函数

B. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 都是"$\{0\}$封闭"函数

C. 若 $f(x)$ 是"$\{1\}$封闭"函数，则 $f(x)$ 一定是"$\{k\}$封闭"函数$(k\in\mathbf{N}^*)$

D. 若 $f(x)$ 是"$[a,b]$封闭"函数$(a,b\in\mathbf{N}^*)$，则 $f(x)$ 不一定是"$\{ab\}$封闭"函数

解析

$f(x)$是"A封闭"函数 $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in R$，$x_1-x_2\in A \Rightarrow f(x_1)-f(x_2)\in A$.

A：$f(x)=x^2$时，若$|x_1-x_2|\le 1 \Rightarrow |x_1^2-x_2^2|=|x_1-x_2||x_1+x_2|$

取$x_1=8$，$x_2=7$，$|f(x_1)-f(x_2)|\notin A$. A错误；

B：对$\forall x_1,x_2$，满足$x_1=x_2$，有$|f(x_1)-f(x_2)|=0\in A$，B正确；

C：$f(x)$是"$\{1\}$封闭"的 $\Leftrightarrow x_1-x_2=1 \Rightarrow f(x_1)-f(x_2)=1$

则对 $\forall x_1, x_2$ 满足 $x_1 - x_2 = k$，$k \in N^*$.

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_2 + k) - f(x_2) = \sum_{i=1}^{k}[f(x_2+i) - f(x_2+i-1)]$$

$$= \sum_{i=1}^{k} 1 = k$$ 故 $f(x)$ 是 $\{k\}$ 封闭的. C正确；

D：若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 封闭的，则 $x_1 - x_2 \in [a,b] \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \in [a,b]$

则 $f(m+ab) - f(m) = \sum_{k=1}^{a}[f(m+kb) - f(m+(k-1)b)] \in [a^2, ab]$.

$f(m+ab) - f(m) = \sum_{k=1}^{b}[f(m+ka) - f(m+(k-1)a)] \in [ab, b^2]$

故 $f(m+ab) - f(m) = ab \Rightarrow f(x)$ 是 $\{ab\}$ 封闭的. D错误.

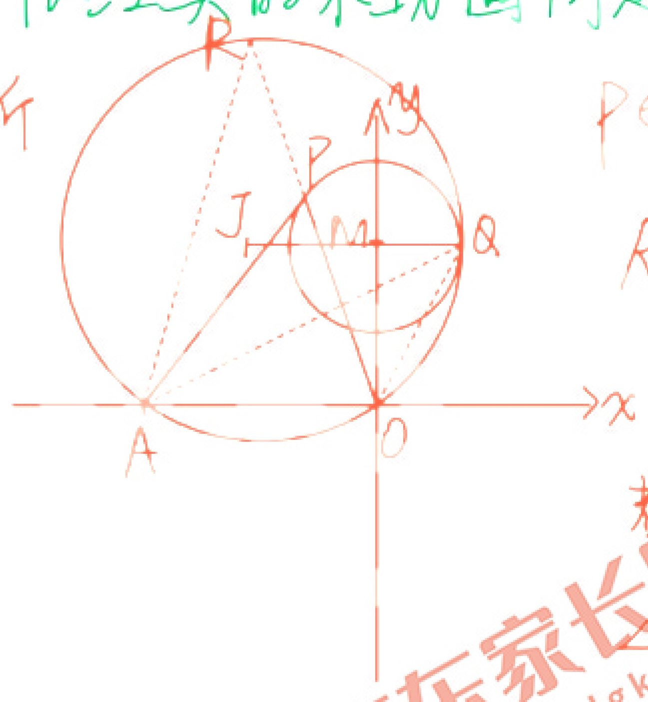
故选BC.

注D有些困难，"算两次"的思想.

16. 已知动圆 N 经过点 $A(-6, 0)$ 及原点 O，点 P 是圆 N 与圆 M：$x^2 + (y-4)^2 = 4$ 的一个公共点，则当 $\angle OPA$ 最小时，圆 N 的半径为________.

注：很经典的米勒动圆问题，找"临界态".

解析



$P \in \odot M$. 求 $\angle APO$ 最小时，$\triangle APO$ 外接圆半径 R.

$R = \dfrac{|AO|}{2\sin\angle APO}$，只需求 $\angle APO$ 的最小值.

考虑 $\triangle AQO$ 的外接圆 $\odot J$ 恰与 $\odot M$ 相切于 Q.

若 OP 与 $\odot J$ 交于 R，且 $P \neq R$，则

$\angle APO > \angle ARO = \angle AQO$.

当且仅当时，有 $P = R = Q$. 故 $\angle AQO$ 为 $\angle APO$ 的最小值.

此时 $R = |JQ|$. 设 $J(-3, m)$，$M(0,4)$　$|JM| = R - |MQ| = |JO| - 2$

则 $\sqrt{9+(m-4)^2} = \sqrt{9+m^2} - 2 \Rightarrow 9 + m^2 - 8m + 16 = 9 + m^2 + 4 - 4\sqrt{9+m^2}$

$\Rightarrow \sqrt{9+m^2} = 2m - 3 \geq 3 \Rightarrow 9 + m^2 = 4m^2 - 12m + 9 \Rightarrow m = 4$

IMPORTANT!!

故 $R = |JO| = 5$.

事实上，易猜得 $Q(2,3)$，只要图画准.

22. （12 分）

已知函数 $f(x)=xe^{x+1}$.

（1）求 $f(x)$ 的极值；

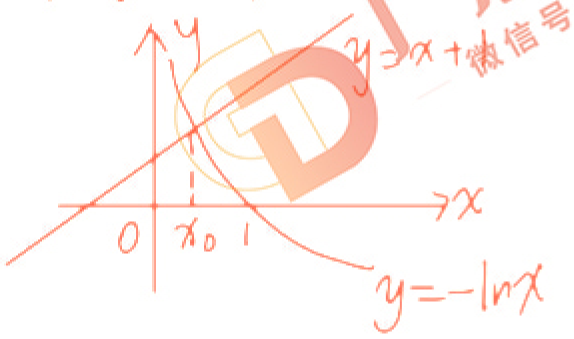
（2）当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant(a+1)x+\ln x+2$，求实数 a 的取值范围.

解析

(1) $f'(x)=(x+1)e^{x+1} \Rightarrow x=-1$ 时，$f(x)$ 有极小值 -1.

(2) $e^{x+1+\ln x}\geq(a+1)x+\ln x+2$，$x>0$.

由于 $\exists x_0\in(0,1)$，$x_0+1+\ln x_0=0$，代入上式得：



$1\geq ax_0+x_0+\ln x_0+2 \Rightarrow ax_0\leq 0 \Rightarrow a\leq 0$.

又 $a\leq 0$ 时，$e^{x+1+\ln x}\geq x+2+\ln x\geq(a+1)x+\ln x+2$.

综上：$a\leq 0$.

注：必要性探路+充要性证明，背景为朗博函数.