高二期末考试数学试卷参考答案(理科)

1. D　$2-\frac{i}{1+i}=2-\frac{i(1-i)}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$.

2. A　因为 $A=\{x|-1<x<6\}$，$B=\{x|x>\frac{3}{2}\}$，所以 $A\cap B=(\frac{3}{2},6)$.

3. C　画出可行域(图略)知，当直线 $z=x+y$ 经过点$(\frac{3}{2},2)$时，z 取得最大值$\frac{7}{2}$.

4. A　$y'=5x^4+2x$，当 $x=1$ 时，$y'=7$.

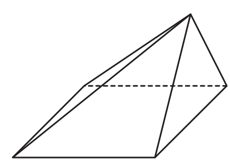
5. A　设圆柱的底面半径为 r，高为 h，则圆柱的体积为 πr^2h，两个圆锥的体积之和为 $2\times\frac{1}{3}\pi r^2\times\frac{h}{2}=\frac{1}{3}\pi r^2h$，故所求的概率为 $1-\frac{\frac{1}{3}\pi r^2h}{\pi r^2h}=\frac{2}{3}$.

6. C　由题可知抛物线 $y^2=2px$ 经过点$(1,2)$，则 $4=2p$，即 $p=2$.

7. B　$f(-x)=\frac{-x^3e^{-x}}{e^{-2x}-1}=\frac{x^3e^x}{e^{2x}-1}=f(x)$，所以 $f(x)$是偶函数，排除 C，D. 当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，排除 A，故选 B.

8. D　设$\{a_n\}$的公差为 d，则 $2a_{510}-a_8=2(a_1+509d)-(a_1+7d)=a_1+1011d=a_{1012}=4$，则 $S_{2023}=\frac{2023(a_1+a_{2023})}{2}=2023a_{1012}=8092$.

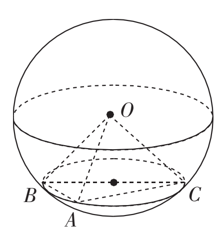
9. B　该几何体的实物图如图所示，则该几何体的表面积为 $4\times4+\frac{1}{2}\times4\times4+2\times\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}=24+8\sqrt{5}+8\sqrt{2}$.



10. C　将直线$(4m-1)x-(m-1)y+2m+1=0$ 转化为$(4x-y+2)m-x+y+1=0$. 令$\begin{cases}4x-y+2=0,\\-x+y+1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$故直线经过定点 $N(-1,-2)$. 当直线 MN 与该直线垂直时，点 M 到该直线的距离取得最大值，此时$\frac{4m-1}{m-1}\times\frac{-3-(-2)}{2-(-1)}=-1$，解得 $m=-2$.

11. D　$f(x)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-2\sin^2\omega x+1=\sqrt{3}\sin2\omega x+\cos2\omega x=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})$. 因为 $\omega>0$，所以由 $0<x<\pi$，得$\frac{\pi}{6}<2\omega x+\frac{\pi}{6}<2\omega\pi+\frac{\pi}{6}$. 因为 $f(x)$在$(0,\pi)$上恰有 5 个零点，所以 $5\pi<2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant6\pi$，解得$\frac{29}{12}<x\leqslant\frac{35}{12}$.

12. D　如图，设 $AB=a$，$AC=b$，$BC=2r$，点 O 到平面 ABC 的距离为 h，则 $a^2+b^2=4r^2$，$r^2+h^2=4$，则 $V_{O-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}abh\leqslant\frac{1}{12}(a^2+b^2)h=\frac{1}{3}r^2h=$



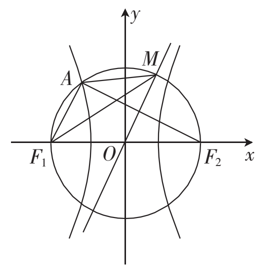
$\frac{1}{3}(4-h^2)h$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立. $V_{O-ABC}=\frac{4}{3}h-\frac{h^3}{3}$，$0<h<2$，所以 $V'_{O-ABC}=\frac{4}{3}-h^2$，当 $h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，V_{O-ABC} 取最大值，此时 $a=b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

13. -4　因为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以 $6(m+2)-3m=0$，解得 $m=-4$.

14. -672　$(x-\frac{2}{x^2})^9$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_9^r x^{9-r}(-\frac{2}{x^2})^r=(-2)^r C_9^r x^{9-3r}$，令 $9-3r=0$，即 $r=3$，得 $(x-\frac{2}{x^2})^9$ 展开式中的常数项是 $(-2)^3C_9^3=-672$.

15. 1351　因为 $a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=\begin{cases}a_{n+1}-a_n, a_n<a_{n+1},\\ a_n-a_{n+1}, a_n\geqslant a_{n+1},\end{cases}$ 所以 $a_3=1,a_4=1,a_5=0,a_6=1,a_7=1,a_8=0$，则 $\{a_n\}$ 从第 3 项起为周期数列，则 $S_{2023}=674\times2+3=1351$.

16. $\sqrt{5}$；$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=1$　如图，因为 $OM\parallel F_1A$，所以 $\tan\angle AF_1F_2=\frac{b}{a}$. 又 $AF_1\perp AF_2$，$|F_1F_2|=2c$，所以 $|AF_1|=2a$，$|AF_2|=2b$，则 $2b=4a$，所以 $b=2a$，则 $c=\sqrt{5}a$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$. 因为 F_1 到渐近线 OM 的距离为 b，所以 $S_{\triangle MAF_1}=\frac{1}{2}\times2a\times b=2a^2=4$，所以 $a^2=2$，$b^2=4a^2=8$，则 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=1$.



17. 解：(1) 因为 $\sqrt{3}b\sin C=3c\cos B$，所以 $\sqrt{3}\sin B\sin C=3\sin C\cos B$. ………………………… 2 分

又 $\sin C\neq0$，所以 $\sqrt{3}\sin B=3\cos B$，即 $\tan B=\sqrt{3}$， ……………………………………… 4 分

所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………………… 6 分

(2) 由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-3ac$， ………………………………… 8 分

则 $a+c=\sqrt{b^2+3ac}=8$， ……………………………………………………………… 10 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 12. ……………………………………………………………… 12 分

18. 解：(1) $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\frac{60+45+40+30+25}{5}=40$. ………………………… 1 分

$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=1\times60+2\times45+3\times40+4\times30+5\times25=515$，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$，…

…………………………………………………………………………………………… 3 分

则 $\hat{b}=\frac{515-5\times3\times40}{55-5\times3^2}=-8.5$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\,\bar{x}=40+8.5\times3=65.5$， ……………………… 5 分

故 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=-8.5x+65.5$. ……………………………………………… 6 分

(2) 由(1)可知，当 $x_1=1$ 时，$\hat{y}_1=57$，$|\hat{y}_1-y_1|=|57-60|=3$，不是正常数据.　……… 7 分

当 $x_2=2$ 时，$\hat{y}_2=48.5$，$|\hat{y}_2-y_2|=|48.5-45|>3$，不是正常数据. ……………………… 8 分

当 $x_3=3$ 时，$\hat{y}_3=40$，$|\hat{y}_3-y_3|=|40-40|<3$，是正常数据. ……………………………… 9 分

当 $x_4=4$ 时，$\hat{y}_4=31.5$，$|\hat{y}_4-y_4|=|31.5-30|<3$，是正常数据. ………………… 10 分

当 $x_5=5$ 时，$\hat{y}_5=23$，$|\hat{y}_5-y_5|=|23-25|<3$，是正常数据. ………………… 11 分

故表格中共有 3 组数据是正常数据. ………………………………………………… 12 分

19.(1)证明：因为 $PB\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PB\perp AD$. ………………… 1 分

又 $\angle BAD=90^\circ$，所以 $AB\perp AD$. 由 $PA\cap AB=A$，得 $AD\perp$ 平面 PAB. ………………… 2 分

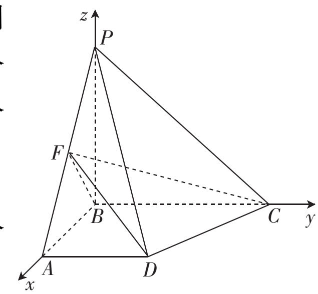
因为 $BF\subset$ 平面 PAB，所以 $AD\perp BF$. ……………………………………………… 3 分

因为 F 为 PA 的中点，$PB=AB$，所以 $PA\perp BF$. ………………………………… 4 分

由 $PA\cap AD=A$，得 $BF\perp$ 平面 PAD. ……………………………………………… 5 分

因为 $PD\subset$ 平面 PAD，所以 $BF\perp PD$. ……………………………………………… 6 分

(2)解：以 B 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则



$P(0,0,6)$，$F(3,0,3)$，$C(0,6,0)$，$D(6,3,0)$， ……………… 7 分

$\overrightarrow{CF}=(3,-6,3)$，$\overrightarrow{CD}=(6,-3,0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,-6,6)$. ……… 8 分

设平面 CDF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}3x_1-6y_1+3z_1=0,\\6x_1-3y_1=0,\end{cases}$令 $x_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,2,3)$. ………… 9 分

设平面 CDP 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}6x_2-3y_2=0,\\-6y_2+6z_2=0,\end{cases}$令

$x_2=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$. ……………………………………………………… 10 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{11}{3\sqrt{14}}=\dfrac{11\sqrt{14}}{42}$， ……………………………………… 11 分

由图可知，二面角 $P-CD-F$ 的余弦值为$\dfrac{11\sqrt{14}}{42}$. ………………………………… 12 分

20.解：(1)由题可知 $a=2$，$b=1$， ……………………………………………………… 2 分

所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………… 4 分

(2)依题可设直线 A_2Q 的方程为 $y=k(x-2)$，$k<-\dfrac{1}{2}$.

联立方程组$\begin{cases}y=k(x-2),\\\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$消去 y 整理得$(1+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$，

由 $2x_Q=\dfrac{16k^2-4}{1+4k^2}$，得 $x_Q=\dfrac{8k^2-2}{1+4k^2}$，则 $y_Q=\dfrac{-4k}{1+4k^2}$. ……………………… 6 分

直线 A_1B 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+1$，联立方程组$\begin{cases}y=k(x-2),\\y=\dfrac{1}{2}x+1,\end{cases}$解得 $x_P=\dfrac{4k+2}{2k-1}$，$y_P=\dfrac{4k}{2k-1}$. …

……………………………………………………………………………………… 7 分

由 B,Q,R 三点共线,得 $\dfrac{\dfrac{-4k}{4k^2+1}-1}{\dfrac{8k^2-2}{4k^2+1}}=\dfrac{-1}{x_R}$,解得 $x_R=\dfrac{4k-2}{2k+1}$. ………………………………………… 8 分

直线 PR 的方程为 $y-0=\dfrac{\dfrac{4k}{2k-1}}{\dfrac{4k+2}{2k-1}-\dfrac{4k-2}{2k+1}}(x-\dfrac{4k-2}{2k-1})$, ………………………………………… 9 分

整理得 $x-4y+2+2k(x-2)=0$,当 $x=2$ 时,$y=1$, ………………………………………… 11 分

故直线 PR 经过定点,该定点坐标为$(2,1)$. ………………………………………… 12 分

21. (1)解:因为 $a=1$,所以 $f(x)=(2x-2)\mathrm{e}^x-x^2+2$,$f'(x)=2x(\mathrm{e}^x-1)\geqslant 0$ 恒成立, … 2 分

所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. ………………………………………… 3 分

又 $f(0)=0$,所以不等式 $f(x)>0$ 的解集为$(0,+\infty)$. ………………………………………… 5 分

(2)证明:$f(x)=(2x-2)\mathrm{e}^x-ax^2+2a^2$,则 $f'(x)=2x(\mathrm{e}^x-a)$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=\ln a$. ………………………………………… 6 分

因为 $0<a<1$,所以 $\ln a<0$.

当 $x\in(-\infty,\ln a)\cup(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$;当 $x\in(\ln a,0)$时,$f'(x)<0$.

故 $f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,\ln a)$和$(0,+\infty)$,单调递减区间为$(\ln a,0)$.

$f(0)=2a^2-2<0$,$f(\ln a)=-a[(\ln a)^2-2\ln a-2a+2]$. ………………………………………… 7 分

令 $g(x)=(\ln x)^2-2\ln x-2x+2$,则 $g'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}-2$,显然当 $x\in(0,1)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,则 $g(a)>g(1)$,即$(\ln a)^2-2\ln a-2a+2>0$,从而 $f(\ln a)<0$. 故 $f(x)$在$(-\infty,0)$上不存在零点. ………………………………………… 9 分

当 $x>1$ 时,易证得 $\mathrm{e}^x>x^2$,从而$(2x-2)\mathrm{e}^x-ax^2+2a^2>(2x-2)x^2-ax^2=x^2(2x-2-a)$,

则 $f(\dfrac{a}{2}+1)>0$, ………………………………………… 11 分

故 $f(x)$有且只有一个零点 x_0,且 $0<x_0<\dfrac{a}{2}+1$,则 $ax_0<\dfrac{a^2}{2}+a<\dfrac{3}{2}$. ………………… 12 分

22. 解:(1)由$\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=1+2\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),消去参数 α,得曲线 C 的普通方程为 $x^2+(y-1)^2=4$.

………………………………………… 3 分

由 $\tan\theta=3$,得直线 l 的直角坐标方程为 $y=3x$. ………………………………………… 5 分

(2)直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=1+\dfrac{\sqrt{10}}{10}t,\\ y=3+\dfrac{3\sqrt{10}}{10}t\end{cases}$($t$ 为参数), ………………………………………… 7 分

将其代入曲线 C 的普通方程得 $t^2+\dfrac{7\sqrt{10}}{5}t+1=0$, ………………………………………… 8 分

则 $t_1+t_2=-\dfrac{7\sqrt{10}}{5}$,$t_1t_2=1$, ………………………………………… 9 分

故$|PM|+|PN|=|t_1|+|t_2|=|t_1+t_2|=\frac{7\sqrt{10}}{5}$. ………………………………… 10分

23. 解:(1)因为$a=2$,所以$f(x)=|x+2|+|x-\frac{1}{2}|$. ………………………………… 1分

当$x\leqslant-2$时,原不等式转化为$-x-2-x+\frac{1}{2}\leqslant7$,解得$-\frac{17}{4}\leqslant x\leqslant-2$. ……………… 2分

当$-2<x<\frac{1}{2}$时,原不等式转化为$x+2-x+\frac{1}{2}\leqslant7$,解得$-2<x<\frac{1}{2}$. ……………… 3分

当$x\geqslant\frac{1}{2}$时,原不等式转化为$x+2+x-\frac{1}{2}\leqslant7$,解得$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{11}{4}$. ………………………… 4分

综上所述,不等式$f(x)\leqslant7$的解集为$[-\frac{17}{4},\frac{11}{4}]$. ………………………………… 5分

(2)因为$|x+a|+|x-\frac{1}{a}|\geqslant|a+\frac{1}{a}|$,所以$f(x)\geqslant\frac{10}{3}$恒成立等价于$|a+\frac{1}{a}|\geqslant\frac{10}{3}$恒成立.

……………………………………………………………………………………………… 7分

显然$a\neq0$,当$a>0$时,则$a+\frac{1}{a}\geqslant\frac{10}{3}$,解得$0<a\leqslant\frac{1}{3}$或$a\geqslant3$. …………………………… 8分

当$a<0$时,则$a+\frac{1}{a}\leqslant-\frac{10}{3}$,解得$a\leqslant-3$或$-\frac{1}{3}\leqslant a<0$. ………………………………… 9分

故a的取值范围为$(-\infty,-3]\cup[-\frac{1}{3},0)\cup(0,\frac{1}{3}]\cup[3,+\infty)$. …………………… 10分