

数 子

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{3-x}\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $A \cap B =$
 - A. $\{3\}$
 - B. $\{2, 3\}$
 - C. $\{1, 2, 3\}$
 - D. $\{1, 2, 3, 4\}$
2. 设复数 $z = \frac{3+i^3}{1+2i}$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$
 - A. $\sqrt{2}$
 - B. $\sqrt{3}$
 - C. $\sqrt{5}$
 - D. $\sqrt{13}$
3. 函数 $f(x) = \sin(x+\varphi)\cos(x+\varphi)$ 的图象的一条对称轴方程是 $x = -\frac{\pi}{4}$, 则 φ 的最小正值为
 - A. $\frac{\pi}{6}$
 - B. $\frac{\pi}{4}$
 - C. $\frac{\pi}{3}$
 - D. $\frac{\pi}{2}$
4. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的两个焦点, P 为椭圆上一点, 则 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2|$ 的最大值为
 - A. 64
 - B. 16
 - C. 8
 - D. 4
5. 已知 $\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{30}}{6}$, 则 $\cos 4\alpha =$
 - A. $\frac{79}{81}$
 - B. $-\frac{79}{81}$
 - C. $\frac{7}{9}$
 - D. $-\frac{7}{9}$
6. 已知一个圆锥的母线长为 6, 体积为 $9\sqrt{3}\pi$, 则此圆锥的高为
 - A. $3\sqrt{3}$
 - B. $\frac{-3\sqrt{3}+3\sqrt{7}}{2}$
 - C. $3\sqrt{3}$ 或 $\frac{-3\sqrt{3}+3\sqrt{7}}{2}$
 - D. $\frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{7}}{2}$
7. 随着 2022 年卡塔尔世界杯的举办, 中国足球也需要重视足球教育. 某市为提升学生的足球水平, 特地当地选拔出几所学校作为足球特色学校, 开设了“5 人制”“7 人制”“9 人制”“11 人制”四类足球体验课程. 甲、乙两名同学各自从中任意挑选两门课程学习, 设事件 $A =$ “甲乙两人所选课程恰有一门相同”, 事件 $B =$ “甲乙两人所选课程完全不同”, 事件 $C =$ “甲乙两人均未选择‘5 人制’课程”, 则

座位号

考生号

姓名

A. A 与 B 为对立事件

B. A 与 C 互斥

C. A 与 C 相互独立

D. B 与 C 相互独立

8. 若经过点 (a, b) 可以且仅可以作曲线 $y = \ln x$ 的一条切线, 则下列选项正确的是

A. $a \leq 0$

B. $b = \ln a$

C. $a = \ln b$

D. $a \leq 0$ 或 $b = \ln a$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 有一组样本数据: 1, 1, 2, 4, 1, 4, 1, 2, 则

A. 这组数据的众数为 4

B. 这组数据的极差为 3

C. 这组数据的平均数为 2

D. 这组数据的 50% 分位数为 1

10. 已知向量 $a = (2, -1)$, $a \parallel b$, $|b| = 2|c|$, $c = (1, 2)$, 则

A. $a \perp c$

B. $|a| = |c|$

C. $b = (4, -2)$

D. $b = a + c$

11. 已知点 P 在圆 $C_1: (x-2)^2 + y^2 = 4$ 上, 点 Q 在圆 $C_2: x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$ 上, 则

A. 两圆外离

B. $|PQ|$ 的最大值为 9

C. $|PQ|$ 的最小值为 1

D. 两个圆的一条公切线方程为 $3x - 4y + 4 = 0$

12. 已知点 P 是棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 上一个动点 (含边界), 若 F 是 A_1B_1 的中点, 且满足 $PF \parallel$ 平面 B_1CD_1 , 则

A. FP 所在的平面与正方体表面的交线为五边形

B. FP 所在的平面与正方体表面的交线为六边形

C. FP 长度的最大值是 $2\sqrt{2}$

D. FP 长度的最小值是 $\sqrt{5}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

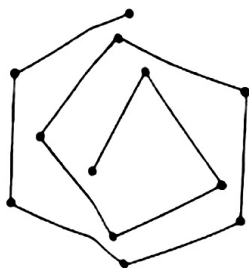
13. 已知函数 $f(x) = \frac{4^x + a}{2^x}$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

14. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$, 且 $f(1) < f(3)$, 请写出一个符合上述条件的函数

$f(x) =$ _____.

15. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 过原点 O 且斜率为 1 的直线与 C 交于点 P , F 为 C 的焦点. 若 $|PO| = 4\sqrt{2}$, 则 $\triangle POF$ 的面积为 _____.

16. 如图, 画一个正三角形, 不画第三边; 接着画正方形, 对这个正方形, 不画第四边; 接着画正五边形, 对这个正五边形, 不画第五边; 接着画正六边形, …… 这样无限画下去, 形成一条无穷伸展的等边折线. 设第 n 条线段与第 $n+1$ 条线段所夹的角为 $\theta_n (n \in \mathbb{N}^*, \theta_n \in (0, \pi))$, 则满足 $\theta_n > 174^\circ$ 的最小 n 值为 _____.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $S_{11} + S_8 = 18, a_2 + a_{10} = 0$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求 $\sum_{k=1}^{10} |a_k|$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)

影响身高的因素主要有以下几点：第一、遗传，遗传基因直接影响人种、身高。第二、睡眠，身高的增长非常依赖于睡眠的质量，睡眠的时间有保障，晚上分泌的生长激素可以很好地作用于人体的骨骼，使人体增高。第三、营养，营养物质特别是蛋白质、钙、铁等要补充充分，为孩子增长身体提供原料。第四、运动，运动影响儿童身高非常明显，运动可以直接促进生长激素的分泌，使生长激素在夜晚增大分泌，促进食欲，还能保证健康的睡眠等等，对于长高有很大帮助。高中学生由于学业压力，缺少睡眠与运动等原因，导致身高偏矮；但同时也会由于营养增加与遗传等原因，导致身高偏高。某市教育局为督促各学校保证学生充足的睡眠、合理的营养搭配和体育锻炼时间，减轻学生学习压力，准备对各校男生身高指数进行抽查，并制定了身高指数档次及所对应得分如下表：

| 档次 | 偏矮 | 正常 | 偏高 | 超高 |
|---------------------|-----------|--------------------|--------------------|--------------|
| 男生身高指数 x (单位: cm) | $x < 170$ | $170 \leq x < 175$ | $175 \leq x < 180$ | $x \geq 180$ |
| 学生得分 | 50 | 70 | 80 | 90 |

某校为迎接检查，学期初通过调查统计得到该校高三男生身高指数服从正态分布 $N(175, 5^2)$ ，并调整睡眠时间、合理的营养搭配和体育锻炼。6 月中旬，教育局聘请第三方机构抽查的该校高三 30 名男生的身高指数频数分布表如下：

| 档次 | 偏矮 | 正常 | 偏高 | 超高 |
|---------------------|-----------|--------------------|--------------------|--------------|
| 男生身高指数 x (单位: cm) | $x < 170$ | $170 \leq x < 175$ | $175 \leq x < 180$ | $x \geq 180$ |
| 人数 | 3 | 9 | 12 | 6 |

(1) 试求学校调整前高三男生身高指数的偏矮率、正常率、偏高率、超高率；

(2) 请你从偏高率、超高率、男生身高指数平均得分三个角度评价学校采取措施的效果。

附：参考数据与公式

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 ① $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$ ；② $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu$

③ $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$.

19. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\triangle ABC$ 的面积为 S , $2a \cos^2 \frac{B}{2} = 2\sqrt{3}S$,

$\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于点 D .

(1) 求 B ;

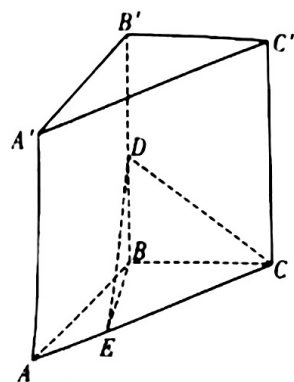
(2) 若 $c=4, BD=2$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC - A'B'C'$ 中, $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = BC = 2$, $AC = BB'$, 点 D 为棱 BB' 的中点, $AE = \frac{1}{3}AC$.

(1) 求 DE 的长度;

(2) 求平面 CDE 与平面 BDE 夹角的余弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知 F_1, F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 且该双曲线离心率小于等于

$\frac{\sqrt{7}}{2}$, 点 M 和 N 是双曲线上关于 x 轴对称非重合的两个动点, A_1, A_2 为双曲线左、右顶点,

$|MF_1| - |MF_2| = 4$, $|MA_1| + |MF_2| > 2 + \sqrt{7}$ 恒成立.

(1) 求该双曲线 C 的标准方程;

(2) 设直线 NA_1 和 MA_2 的交点为 P , 求点 P 的轨迹方程.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2\ln x)$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 证明: 方程 $e^{2f(x)} - e^{f(x)} = 2f(x)$ 有三个不等实根.