

2019~2020 学年度第一学期期中七校联考 高三数学

一、选择题：共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$ ， $B = \{x \in \mathbb{Z} | 1 < x < 5\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $[2, 3]$ B. $(1, 5)$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{2, 3, 4\}$

2. 若 $x > 0 > y$ ，则下列各式中一定正确的是

- A. $\sin x > \sin y$ B. $\ln x < \ln(-y)$ C. $e^x < e^y$ D. $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

3. 已知 $a = 1.1^{0.2}$ ， $b = \log_{0.2} 1.1$ ， $c = 0.2^{1.1}$ ，则

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $a > c > b$ D. $c > a > b$

4. 要得到函数 $y = \sin(4x - \frac{\pi}{3})$ 的图象，只需要将函数 $y = \sin 4x$ 的图象

- A. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位 B. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位
C. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 D. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

5. 有下面四个命题，其中正确命题的序号是

- ① “直线 a 、 b 不相交” 是 “直线 a 、 b 为异面直线” 的充分而不必要条件；
② “直线 $l \perp$ 平面 α 内所有直线” 的充要条件是 “ $l \perp$ 平面 α ”；
③ “直线 $a \parallel$ 直线 b ” 的充要条件是 “ a 平行于 b 所在的平面”；
④ “直线 $a \parallel$ 平面 α ” 的必要而不充分条件是 “直线 a 平行于 α 内的一条直线。”

- A. ①③ B. ②③ C. ②④ D. ③④

6. 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别为 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边. 如果 a, b, c 成等差数列， $\angle B = 30^\circ$ ，

$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$ ，那么 $b =$

- A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ B. $2+\sqrt{3}$ C. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ D. $1+\sqrt{3}$

7. 已知定义域为 R 的奇函数 $y = f(x)$ 的导函数为 $y = f'(x)$, 当 $x \neq 0$ 时,

$f'(x) + \frac{f(x)}{x} < 0$, 若 $a = \frac{2}{3}f(\frac{2}{3}), b = -2f(-2), c = \ln \frac{1}{3}f(\ln \frac{1}{3})$, 则 a, b, c 的大小关系正确的是

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $a < c < b$ D. $c < a < b$

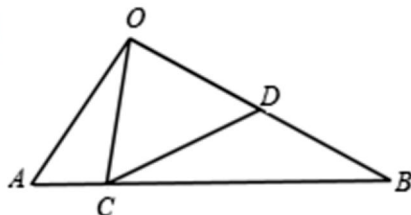
8. 如图, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0, |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{2}, |\overrightarrow{OB}| = 2$, 点 C 是线段 AB 上的一个动点, D 为 OB 的中点, 则 $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OC}$ 的最小值为

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. 2



9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x-1} + 1, & x \in [-2, 0] \\ 2f(x-2), & x \in (0, +\infty) \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - x - 2m + 1$ 在区间

$[-2, 4]$ 内有 3 个零点, 则实数 m 的取值范围是

A. $\left\{m \mid -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}\right\}$

B. $\left\{m \mid -1 < m \leq \frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{m \mid -1 < m < \frac{1}{2} \text{ 或 } m = 1\right\}$

D. $\left\{m \mid -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2} \text{ 或 } m = 1\right\}$

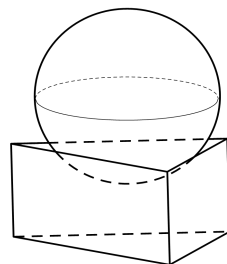
二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

10. 函数 $f(x) = \sqrt{2x}$ 的图象在点 $(1, \sqrt{2})$ 处的切线方程为 .

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 首项为 $a_1 = 1$, 且 $a_n = 2a_{n-1} + 1$, 则 a_5 为 .

12. 若 $y = \log_{\frac{1}{3}}(3x^2 - ax + 5)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递减, 则 a 的取值范围是 .

13. 如图所示, 直三棱柱的高为 4, 底面边长分别是 5, 12, 13, 当球与上底面三条棱都相切时球心到下底面距离为 8, 则球的体积为 .



14. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b} = 1$, 求 $a+b$ 的最小值 $\blacktriangle$.

15. 设函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$, 其中 $\omega > 0$. 若函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上恰有 2 个零点, 则 ω 的取值范围是 $\blacktriangle$.

三、解答题: 本大题共 5 个小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

16. (本小题满分 14 分)

设函数 $f(x) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}, x \in R$

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期和对称中心;

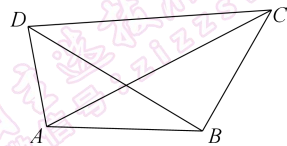
(II) 若函数 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 求函数 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的最值.

17. (本小题满分 14 分)

如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADB = 45^\circ$, $\angle BAD = 105^\circ$, $AD = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $BC = 2$, $AC = 3$.

(I) 求边 AB 的长及 $\cos \angle ABC$ 的值;

(II) 若记 $\angle ABC = \alpha$, 求 $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.



18. (本小题满分 15 分)

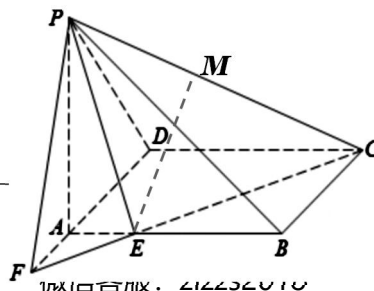
如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$,

$PA = AD = \frac{1}{2} AB = 1$, 点 E, M 分别在线段 AB, PC 上, 且 $\frac{AE}{AB} = \frac{PM}{PC} = \lambda$, 其中 $0 < \lambda < 1$,

连接 CE , 延长 CE 与 DA 的延长线交于点 F , 连接 PE, PF, ME .

(I) 求证: $ME \parallel$ 平面 PDF ;

(II) 若 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 求二面角 $A-PE-F$ 的正弦值;



(III) 若直线 PE 与平面 PBC 所成角的正弦值

为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时, 求 λ 值.

19. (本小题满分 16 分)

已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1 = b_1 = 1$, $b_2 + b_3 = 2a_3$, $a_5 - 3b_2 = 7$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} 1 & n \text{ 为奇数} \\ b_{\frac{n}{2}} & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求 $a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_{2n}c_{2n} (n \in N^*)$.

(III) 对任意正整数 n , 不等式 $a\sqrt{2n+3} \leq (1+\frac{1}{b_2})(1+\frac{1}{b_3})\dots(1+\frac{1}{b_{n+1}})$ 成立, 求正数 a 的取值范围.

20. (本小题满分 16 分)

已知 $f(x) = a\sin x (a \in R)$, $g(x) = e^x$.

(I) 若 $0 < a \leq 1$, 判断函数 $G(x) = f(1-x) + \ln x$ 在 $(0, 1)$ 的单调性;

(II) 设 $F(x) = g(x) - mx^2 - 2(x+1) + k (k \in R)$, 对 $\forall x > 0, m < 0$, 有 $F(x) > 0$ 恒成立, 求 k 的最小值.

(III) 证明: $\sin \frac{1}{2^2} + \sin \frac{1}{3^2} + \sin \frac{1}{4^3} + \dots + \sin \frac{1}{(n+1)^2} < \ln 2, (n \in N^*)$.

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2019-2020 学年高三月考试题及参考答案（更新下载中），点击链接获得

<http://www.zizzs.com/c/201910/39637.html>