# 四川省大数据精准教学联盟2020级高三第二次统一监测

# 文科数学答案解析与评分标准

**一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1.【答案】B

【命题意图】本小题设置课程知识情境，设计复数的乘法运算，主要考查复数的概念，复数的虚部，复数的代数运算等基础性知识；考查运算求解能力.

【解析】由 $(3-2i)(1-i)=1-5i$，所以其虚部为 $-5$.

2.【答案】C

【命题意图】本小题设置课程知识情境，设计不等式解法与集合运算问题，主要考查一元二次不等式的解法，集合的补集与交集运算，集合的表示方法等基础知识；考查运算求解能力.

【解析】集合 $A=\{x|x^2+x-6\leqslant 0\}=\{x|-3\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x<-1\}$，所以 $A\cap(\complement_R B)=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$.

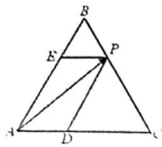
3.【答案】D

【考查意图】本小题以居民消费价格指数问题为情境，设计概率统计相关问题，主要考查统计图表识别与应用、统计量意义等基础知识；考查概率统计思想；考查直观想象、数据分析素养.

【解析】结合图表分析，选项D的分析较为恰当.

4.【答案】C

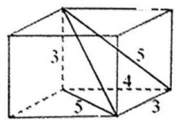
【命题意图】本小题设置平面图形为情境，设计平面向量的线性运算问题，主要考查平面向量的平行四边形法则、平面几何图形的性质、平面向量的线性运算等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，数形结合思想，应用意识.





【解析】如图，过点 $P$，作 $PD/\!/AB$，交 $AC$ 于点 $D$，作 $PE/\!/AC$，交 $AB$ 于点 $E$，由 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AB}$ 知 $AD=\frac{1}{3}AC$，所以 $EP=\frac{1}{3}AC$，故 $EB=\frac{1}{3}AB$，所以 $AE=\frac{2}{3}AB$，而 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$，所以 $\lambda=\frac{2}{3}$.

5.【答案】C





【考查意图】本题主要考查了空间几何体的三视图、直观图等基础知识；考查推理论证、空间想象、运算求解等能力；考查数形结

合等思想方法.

【解析】由三视图可在长方体中还原出该几何体的直观图如上，易知该多面体的表面积为$S=\frac{1}{2}\times(3\times4+3\times4+3\times5+3\times5)=27$.

6.【答案】A

【考查意图】本小题通过设置函数图象探索情境，设计函数图象和性质相关的问题，主要考查函数奇偶性、单调性、零点等知识综合应用；考查函数与方程、数形结合思想；考查推理论证、估算等能力，考查直观想象、逻辑推理素养.

【解析】由解析式可知$f(-x)=f(x)$，则$f(x)$为偶函数，排除选项C，D；由于$f(2)=\cos(e^2-e^{-2}-2)$，由于$\frac{3\pi}{2}<e^2-e^{-2}-2<2\pi$，则$f(2)>0$.

7.【答案】D

【命题意图】本小题设置课程知识情境，设计三角恒等变形问题，主要考查同角三角函数关系，两角和差的正弦公式等基础知识；考查运算求解能力.

【解析】由$\alpha$为锐角，且$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{5}$，所以$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{4}{5}$，则$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

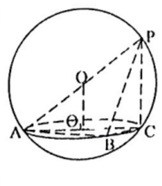
8.【答案】B

【命题意图】本小题设置课程知识情境，设计递推数列问题，主要考查数列的前$n$项和与通项公式等基础知识；考查运算求解能力，分类讨论思想，逻辑推理素养.

【解析】当$n=1$时，有$2a_1=1\cdot2^1$，所以$a_1=1$，当$n\geqslant2$时，由$2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^na_n=n\cdot2^n$……(1)，$2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}=(n-1)\cdot2^{n-1}$………(2)，(2)－(1)得$2^na_n=n\cdot2^n-(n-1)2^{n-1}=(n+1)2^{n-1}$，此时，$a_n=\frac{n+1}{2}$，$a_1=1$也满足，所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n+1}{2}$.

9.【答案】A

【命题意图】本小题以球体为载体考查空间点、线、面位置关系、勾股定理等基础知识，考查学生直观想象、运算求解、推理论证等能力；考查数形结合、化归与转化等思想方法.

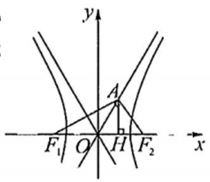



【解析】如图，设$O_1$为$\triangle ABC$的外心，则$O_1$为$AO_1$的中点. 又设$AO_1=r$，$\triangle ABC$中$AC$边上的高为$h$. 由已知，$OO_1=\sqrt{4-r^2}$，$S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\times2r\times2\sqrt{4-r^2}=2\sqrt{r^2(4-r^2)}\leqslant r^2+4-r^2=4$，当且仅当$r^2=4-r^2$等号成立，即当$r=\sqrt{2}$时，$\triangle PAC$面积取得最大值4. 此时，$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times PC=\frac{1}{3}\times r\times h\times PC=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times h\times2\sqrt{2}=\frac{4}{3}h$. 显然，$h$的最大值等于$r$，故$V_{P-ABC}\leqslant\frac{4\sqrt{2}}{3}$，即三棱锥体

积的最大值为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

10. 【答案】B

【命题意图】本小题考查双曲线的标准方程、双曲线的简单几何性质、锐角三角函数等基础知识；考查推理论证、运算求解等能力；考查数形结合、化归转化等思想方法.




【解析】双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$. 如图，由 $F_1A\perp F_2A$ 知 $|OA|=c$, $\angle AOH=\frac{\pi}{3}$, $|AH|=\frac{\sqrt{3}}{2}c$, $S_{\triangle F_1AF_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\times|AH|=c\times|AH|=\frac{\sqrt{3}}{2}c^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以 $c=1$. 由 $a^2+3a^2=c^2$ 得 $a=\frac{1}{2}$，故双曲线 $C$ 的实轴长为1.

11. 【答案】C

【命题意图】本小题以毕达哥拉斯勾股树为情境，设计等比数列问题，主要考查等比数列的前 $n$ 项和，通项公式等基础知识，考查运算求解能力，逻辑推理素养.

【解析】依题意，不同边长的正方形的个数，构成以1为首项，2为公比的等比数列，所以 $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=127$，即 $\frac{1-2^n}{1-2}=127$，解得 $n=7$，即有7种边长不同的正方形；又正方形的边长构成以16为首项，$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为公比的等比数列. 因此，最小的正方形边长 $a_7=16\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{7-1}=2$.

12. 【答案】A

【命题意图】本小题通过设置指数式与对数式大小探索性情景，设计函数与导数应用问题，主要考查利用导数研究函数性质等基础知识；考查推理论证、运算求解等数学能力，数学抽象、逻辑推理素养.

【解析】不等式 $\frac{e^x}{x}+a\ln x-ax+e^2\geqslant 0$，即 $\frac{e^x}{x}+a\ln x-a\ln e^x+e^2\geqslant 0$，所以 $\frac{e^x}{x}-a\ln\frac{e^x}{x}+e^2\geqslant 0$. 设 $t=\frac{e^x}{x}(x>0)$，则 $t'=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，可知 $0<x<1$ 时，$t'(x)<0$，$t(x)$ 单调递减；$x>1$ 时，$t'(x)>0$，$t(x)$ 单调递增，所以 $t(x)\geqslant t(1)=e$. 令 $f(t)=t-a\ln t+e^2$ $(t\geqslant e)$，则 $f'(t)=1-\frac{a}{t}=\frac{t-a}{t}(t\geqslant e)$. 当 $0<a\leqslant e$ 时，$f'(t)\geqslant 0$，$f(t)$ 单调递增，则 $f(t)\geqslant f(e)=e-a+e^2\geqslant 0$，则 $a\leqslant e+e^2$，故 $0<a\leqslant e$ 满足条件；当 $a>e$ 时，则 $f(t)$ 在 $(e, a)$ 上单调递减；在 $(a, +\infty)$ 上单调递增，则 $f(t)_{\min}=f(a)=a-a\ln a+e^2\geqslant 0$，设 $g(a)=a-a\ln a+e^2(a>e)$，则 $g'(a)=-\ln a<0$，则 $g(a)$ 在 $(e, +\infty)$ 单调递减，又 $g(e^2)=e^2-e^2\ln e^2+e^2=0$，所以，$g(a)\geqslant g(e^2)$，则 $e<a\leqslant e^2$，综上所述，$a$ 的取值范围是 $(0, e^2]$.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 【答案】$\frac{11}{2}$

【命题意图】本小题设置课程知识情境，设计线性规划问题，主要考查在约束条件确定

的可行域内求目标函数的最值问题；考查运算求解能力，数形结合思想，应用意识.

【解析】由约束条件作出可行域为以三点 $(1,-1)$，$(1,2)$，$\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$ 为顶点的三角形及其内部，当直线 $z=2x+y$ 过点 $\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$ 时，$z$ 取得最大值 $\frac{11}{2}$.

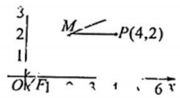
14.【答案】7

【命题意图】本小题设置实际生活情境，设计算法与统计量问题，主要考查数据的采集和处理，算法程序等基础知识；考查逻辑推理能力，应用意识.

【解析】根据程序框图知，是统计这 10 个评分中大于或等于 95 分的个数，则有 7 个.

15.【答案】$\frac{5}{8}$

【考查意图】本小题考查抛物线的光学性质、过焦点弦的性质、三角形的面积等基础知识，考查学生直观想象、运算求解、推理论证等能力；考查数形结合、化归与转化等思想方法.




【解析】依题意，由抛物线性质知直线 $MN$ 过焦点. 而 $M(2,2)$，$F(\frac{1}{2},0)$，则 $l_{MN}$:$4x-3y-2=0$，设 $N(x_0,y_0)$，由 $\begin{cases}4x-3y-2=0,\\ y^2=2x\end{cases}$ 得 $2y^2-3y-2=0$. 所以 $y_0=-\frac{1}{2}$，$x_0=\frac{1}{8}$.

则 $S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}|OF|\cdot|2-y_0|=\frac{5}{8}$.

16.【答案】210

【命题意图】本小题以函数为知识探索情境，设计函数与导数综合问题，主要考查函数奇偶性、对称性、导数应用等基础知识；考查化归与转化等数学思想；考查抽象概括、推理论证等数学能力；考查数学抽象，逻辑推理等素养.

【解析】因为 $f(1-x)$ 为奇函数，则 $f(1+x)=-f(1-x)$，即 $f(1+x)+f(1-x)=0$，所以 $f(x)$ 关于点 $(1,0)$ 对称，且 $f(1)=0$；又 $1-f(x+2)$ 为奇函数，则 $1-f(-x+2)=-1+f(x+2)$，所以 $f(x+2)+f(-x+2)=2$，故 $f(x)$ 关于点 $(2,1)$ 对称，且 $f(2)=1$. 于是 $f(2)+f(0)=0$，则 $f(0)=-1$；$f(3)+f(1)=2$，则 $f(3)=2$；$f(4)+f(0)=2$，则 $f(4)=3$，…，$f(21)=20$，所以 $\sum f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(21)=0+1+2+3+\ldots+20=210$.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.【考查意图】本小题利用回归模型的选择为情景，设置概率统计应用问题，考查回归方程及其应用等基础知识；考查推理论证、运算求解、数据处理能力和数学建模、数学运算素养.

【解析】(1) 应该选择模型②. ……………………………………2分

由于模型②残差点比较均匀地落在水平的带状区域中，且带状区域的宽度比模型②带状宽度窄，所以模型②的拟合精度更高，回归方程的预报精度相应就会越高，故选模型②比较合适. ……………………………………4分

(2) 根据模型②，令 $t=\sqrt{x}$，研发投入 $y$ 与 $t$ 可用线性回归来拟合，有 $\hat{y}=\hat{c}+\hat{d}t$.

则 $\hat{d}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})(t_i-\overline{t})}{\sum\limits_{i=1}^{10}(t_i-\overline{t})^2}=\dfrac{28.67}{4.5}\approx 6.371$，……………………………………6分

所以 $\hat{c}=\overline{y}-\hat{d}\overline{t}=75-6.371\times 2.25\approx 60.67$，……………………………………8分

则 $y$ 关于 $t$ 的线性回归方程为 $\hat{y}=6.37t+60.67$.

所以，$y$ 关于 $x$ 的回归方程为 $\hat{y}=6.37\sqrt{x}+60.67$. ……………………………………10分

2028年，即 $x=16$ 时，$\hat{y}=6.37\sqrt{16}+60.67\approx 86.15$(亿元).

所以，该公司2028年高科技研发投入 $y$ 的预报值为86.15(亿元). ……………………12分

18.【命题意图】本小题设置课程知识情境，设计三角形边角关系问题，主要考查正弦定理、余弦定理、两角和差的三角公式、三角形周长等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，创新意识和应用意识.

【解析】(1) 因为 $a=b\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$，

由正弦定理得，$\sin A=\sin B\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$， ……………………2分

又 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

所以 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin B\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$，

所以 $\cos B\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$，

所以 $\tan B=\sqrt{3}$，又 $B\in(0,\pi)$，

所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………6分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，设 $a=2x$，$c=y$，则 $BD=DC=x$，

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理有 $x^2+y^2-xy=7$，  ①

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理有 $4x^2+y^2-2xy=7$，  ② ……………………8分

联立①②得，$x=1$，$y=3$，即 $c=3$，$a=2$. ……………………11分

所以 $\triangle ABC$ 的周长 $5+\sqrt{7}$. ……………………………………12分

19.【命题意图】本题考查多面体的结构特征、面面垂直的判定定理、面面垂直的性质定理、异面直线所成的角、锥体体积等基础知识；考查空间想象、推理论证、运算求解等能力；

考查化归与转化、数形结合等思想方法.

【解析】(1)证明:因为 $AC=BC$,

所以 $\angle BAC$ 为锐角.

因为 $ED\parallel AB$,

所以 $\angle BAC$ 为异面直线 $DE$ 与 $AC$ 所成角,

所以 $\angle BAC=45^\circ$.

所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,所以 $\angle ACB=90^\circ$.

则 $AC\perp BC$. ……………………………………2 分

因为平面 $ABDE\perp$ 平面 $ABC$, $DB\perp AB$, 平面 $ABDE\cap$ 平面 $ABC=AB$, $DB\subset$ 平面 $ABDE$,

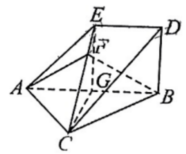
所以 $DB\perp$ 平面 $ABC$, $DB\perp AC$, ……………………………………4 分

所以 $AC\perp$ 平面 $BCD$.

因为 $AC\subset$ 平面 $ACE$,

所以平面 $ACE\perp$ 平面 $BCD$. ……………………………………6 分

(2)取 $AB$ 中点 $G$,连接 $FG$, $BE$. 如图:




因为 $AB=2DE=2BD=2$, $DB\perp AB$, $ED\parallel AB$,

所以 $AE=BE=\sqrt{2}$.

因为 $AC=BC$,所以 $\triangle ACE\cong\triangle BCE$.

所以 $\angle ACE=\angle BCE$, $\triangle ACF\cong\triangle BCF$.

所以 $AF=BF$, $FG\perp AB$. ……………………………………8 分

所以 $\triangle AFB$ 面积最小时,线段 $FG$ 最短.

因为 $EG=CG$,

所以当点 $F$ 为 $CE$ 中点时, $FG\perp CE$,线段 $FG$ 最短. ……………………10 分

此时, $V_{F-ABE}=\frac{1}{2}V_{C-ABE}=\frac{1}{2}V_{E-ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times EG=\frac{1}{6}$. ……12 分

20. 【命题意图】本题考查椭圆的标准方程、椭圆的简单几何性质、直线与椭圆的位置关系、圆的标准方程、向量的数量积、基本不等式等基础知识;考查推理论证、运算求解等能力;考查数形结合、函数与方程、化归转化等思想方法.

【解析】(1)因为当点 $N$ 为椭圆 $C$ 的短轴端点时, $|NF_2|=a$,

所以 $a=bc$, $b=\frac{a}{c}=\sqrt{2}$. ……………………………………1 分

所以 $a^2=c^2+2$.

因为 $\frac{\ }{a}=\frac{\ }{2}$，$a=2$. ……………………………………………………3分

所以椭圆 $C$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………………4分

（2）设 $M(x_0,y_0)$，则 $x_0^2+y_0^2=4$.

因为直线 $AM$ 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，……………………………………5分

由 $(x+2)$，

$[(x_0+2)^2+2y_0^2]x^2+8y_0^2x+8y_0^2-4(x_0+2)^2=0$. ……………………………6分

则 $x_N\cdot 2=-\frac{8y_0^2}{(x_0+2)^2+2y_0^2}$

即 $x_N=\frac{2(x_0+2)^2-4y_0^2}{(x_0+2)^2+2y_0^2}$，$y_N=\frac{y_0}{x_0+2}(x_N+2)=\frac{4(x_0+2)y_0}{(x_0+2)^2+2y_0^2}$.

则 $N(\frac{2(x_0+2)^2-4y_0^2}{(x_0+2)^2+2y_0^2},\frac{4(x_0+2)y_0}{(x_0+2)^2+2y_0^2})$. ……………………………7分

所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\frac{2(x_0+2)^2-4y_0^2}{(x_0+2)^2+2y_0^2}\cdot x_0+\frac{4(x_0+2)y_0}{(x_0+2)^2+2y_0^2}\cdot y_0$

$=\frac{2x_0(x_0+2)^2-4x_0y_0^2+4(x_0+2)y_0^2}{(x_0+2)^2+2y_0^2}=\frac{2x_0(x_0+2)^2+8y_0^2}{(x_0+2)^2+2y_0^2}$

$=\frac{2x_0(x_0+2)^2+8(4-x_0^2)}{(x_0+2)^2+2(4-x_0^2)}=\frac{2x_0^2-4x_0+16}{6-x_0}$，……………………………9分

令 $6-x_0=t$，则 $4<t<8$

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\frac{2t^2-20t+64}{t}=2t+\frac{64}{t}-20\geqslant 2\sqrt{2t\times\frac{64}{t}}-20=16\sqrt{2}-20$

当且仅当 $2t=\frac{64}{t}$，即 $t=4\sqrt{2}$ 时等号成立，……………………………11分

所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的最小值为 $64\sqrt{2}-96$. ……………………………12分

方法二：设直线 $AM$ 的方程为 $y=k(x+2)$，

则直线 $BM$ 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x-2)$. ……………………………5分

由 $\begin{cases}y=k(x+2),\\ \end{cases}$ $x=\frac{2(1-k^2)}{k^2+1}$，即 $M(\frac{2(1-k^2)}{k^2+1},\frac{4k}{k^2+1})$. ……………………6分

由 $\begin{cases}y=k(x+2),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$.

则 $2\cdot x_N=\frac{\ }{1+2k^2}$

即 $x_N=\frac{2-4k^2}{1+2k^2}$，$y_N=k(\frac{2-4k^2}{1+2k^2}+2)=\frac{4k}{1+2k^2}$.

即 $N(\frac{2-4k^2}{1+2k^2},\ \frac{4k}{1+2k^2})$，…………………………………………………………8 分

所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\frac{2(1-k^2)}{k^2+1}\times\frac{2-4k^2}{1+2k^2}+\frac{4k}{k^2+1}\cdot\frac{4k}{1+2k^2}$

$=\frac{8k^4+4k^2+4}{2k^4+3k^2+1}=4-\frac{8k^2}{2k^4+3k^2+1}=4-\frac{8}{2k^2+\frac{1}{k^2}+3}$

$\geqslant 4-\frac{8}{2\sqrt{2k^2\times\frac{1}{k^2}}+3}=16\sqrt{2}-20$，…………………………………………10 分

当且仅当 $2k^2=\frac{1}{k^2}$，即 $k^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立. …………………………………………11 分

所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的最小值为 $16\sqrt{2}-20$. ……………………………………………12 分

21.【考查意图】本小题以函数与不等式为知识探索情景，设置函数性质，大小比较等问题，考查函数单调性、极值、导数应用等基础知识；考查化归与转化、函数与方程等数学思想；考查推理论证、运算求解等数学能力；考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等素养.

【解析】(1) 由 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}ax^2-x$ 得，$f'(x)=e^x-ax-1$，

由于函数 $f(x)$ 单调递增，则 $f'(x)=e^x-ax-1\geqslant 0$ 恒成立. ……………………………1 分

设 $h(x)=e^x-ax-1$，则 $h'(x)=e^x-a$，

当 $a=0$ 时，$f'(x)=e^x-1$，可知 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，不满足条件； ……………………2 分

当 $a<0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

又 $h(\frac{1}{a})=e^{\frac{1}{a}}-a\cdot\frac{1}{a}-1=e^{\frac{1}{a}}-2<0$，即 $f'(\frac{1}{a})<0$，不满足条件；……………………3 分

当 $a>0$ 时，令 $h'(x)=0$，得 $x=\ln a$，

则 $0<x<\ln a$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，$x>\ln a$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $x=\ln a$ 时，$h(x)$ 取得极小值 $h(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a-1=a-a\ln a-1$，

由 $h(\ln a)\geqslant 0$，得 $a-1-a\ln a\geqslant 0$，

令 $u(a)=a-1-a\ln a$，则 $u'(a)=-\ln a$，

可知 $0<a<1$ 时，$u'(a)>0$，$u(a)$ 单调递增；$a>1$ 时，$u'(a)<0$，$u(a)$ 单调递减，

则 $u(a)_{\max}=u(1)=0$，由于 $a-1-a\ln a\geqslant 0$ 恒成立，

所以，$a-1-a\ln a=0$，当且仅当 $a=1$ 时取等号，

故 $f(x)$ 单调递增时，$a$ 的值为 1. ………………………………………………………………5 分

(2) $(1+1)(1+\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{n^2})<e^2$. ……………………………………………………6 分

理由如下：

由(1)可知，当 $a=1$ 时，$e^x-x-1\geqslant 0$，即有 $e^x\geqslant x+1$，

则 $x>0$ 时，$\ln(x+1)<x$，……………………………………………………………………7分

故当 $n\in N^*$ 且 $n\geqslant 2$ 时，

$$\ln\left[(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]=\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\leqslant 1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n^2},$$ ……………………………………………8分

因为 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，……………………………………9分

所以 $1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]$

$=1+1-\frac{1}{n}$

$<2$，

则 $\ln\left[(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]<2$，

所以，$(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<e^2$. ……………………………………12分

**(二)选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。**

22.【命题意图】本小题考查曲线的直角坐标方程与极坐标方程的互化，直线的参数方程，直线参数方程参数的几何意义，直线与圆的位置关系等基础知识；考查推理论证能力、运算求解等能力；考查化归与转化、数形结合等思想方法.

【解析】(1)由 $\rho=4\cos\theta$ 得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，……………………………………2分

将 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$ 代入上式得 $x^2+y^2-4x=0$.

即 $C_2$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4x=0$. ……………………………………5分

(2)将 $C_1$ 的参数方程 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\y=1+t\sin\alpha\end{cases}$ 代入 $C_2$ 的方程 $x^2+y^2-4x=0$，

整理得 $t^2+2(\sin\alpha-\cos\alpha)t-2=0$. ……………………………………6分

由 $t$ 的几何意义可设 $|PA|=|t_1|$，$|PB|=|t_2|$.

因点 $P$ 在 $C_2$ 内，方程必有两个实根.

所以 $t_1+t_2=-2(\sin\alpha-\cos\alpha)$…… ①，$t_1\cdot t_2=-2$…… ②……………………7分

因为 $\frac{1}{|PA|^2}+\frac{1}{|PB|^2}=\frac{|PA|^2+|PB|^2}{|PA|^2\cdot|PB|^2}$

$=\frac{(t_1+t_2)^2-2t_1\cdot t_2}{(t_1\cdot t_2)^2}=2-\sin2\alpha=1$，

所以 $\sin2\alpha=1$.

因为$\alpha \in [0,\pi)$，所以$\alpha=\frac{\pi}{4}$. ……………………………………………………9分

所以$C_1$的普通方程为$y=x$，

所以$C_1$的极坐标方程$\theta=\frac{\pi}{4}(\rho \in \mathrm{R})$. ……………………………………………10分

23.【考查意图】本小题以不等式为知识探索情景，设置最值与不等式证明问题，考查均值不等式、不等式证明方法等基础知识；考查推理论证、运算求解等能力；考查逻辑推理、数学运算等素养.

【解析】(1) 不存在$a,b,c$，使$a^2+b^2+4c^2 \in (0,4)$. …………………………………2分

由题，$(a^2+b^2+4c^2)(1+1+\frac{1}{4}) \geqslant (a+b+2c \cdot \frac{1}{2})^2=9$，即$a^2+b^2+4c^2 \geqslant 4$.

当且仅当$a=b=\frac{2c}{\frac{1}{2}}$，且$a+b+c=3$，即$a=b=\frac{4}{3}$，$c=\frac{1}{3}$时“=”成立，

所以$a^2+b^2+4c^2$的最小值为4.

所以不存在$a,b,c$，使$a^2+b^2+4c^2 \in (0,4)$. ………………………………………………5分

(2) $\frac{1}{2a+\sqrt{bc}}+\frac{1}{2b+\sqrt{ac}}+\frac{1}{2c+\sqrt{ab}}$

$\geqslant \frac{1}{2a+\frac{b+c}{2}}+\frac{1}{2b+\frac{a+c}{2}}+\frac{1}{2c+\frac{a+b}{2}}$

$=\frac{2}{4a+b+c}+\frac{2}{4b+a+c}+\frac{2}{4c+a+b}$

$=\frac{2}{3a+3}+\frac{2}{3b+3}+\frac{2}{3c+3}$

$=\frac{1}{18}(3a+3+3b+3+3c+3)(\frac{2}{3a+3}+\frac{2}{3b+3}+\frac{2}{3c+3})$

$\geqslant \frac{1}{18}(\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2})^2$

$=1$，

当且仅当$a=b=c=1$取“=”.

所以$\frac{1}{2a+\sqrt{bc}}+\frac{1}{2b+\sqrt{ac}}+\frac{1}{2c+\sqrt{ab}} \geqslant 1$. ……………………………………10分