

北师大附属实验中学 2019-2020 学年度第一学期

高三数学期中考试试卷

一、单项选择题

1. 已知全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$ ， $B = \{x | x^2 - 7x + 10 < 0\}$ ，则 $C_U(A \cap B) = (\quad)$

- A. $(-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$ B. $(-\infty, 3] \cup (5, +\infty)$ C. $(-\infty, 3] \cup [5, +\infty)$ D. $(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$

2. 下列函数中，既是偶函数又存在零点的是()

- A. $y = \cos x$ B. $y = \sin x$ C. $y = \ln x$ D. $y = x^2 + 1$

3. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(2) = 1$ ，设 $f(x_0) = y_0$ ，则“ $y_0 = 1$ ”是“ $x_0 = 2$ ”的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 要得到函数 $y = \log_2(2x + 4)$ 的图象，只需将函数 $y = \log_2(x + 2)$ 的图象()

- A. 向左平移 2 个单位长度 B. 向右平移 2 个单位长度
C. 向上平移 1 个单位长度 D. 向下平移 1 个单位长度

5. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和，且 $S_3 > S_2 > S_4$ ，以下有四个命题：

① 数列 $\{S_n\}$ 中的最大项为 S_{10}

② 数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d < 0$

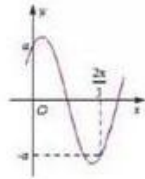
③ $S_{10} > 0$

④ $S_{11} < 0$

其中正确的序号是()

- A. ②③ B. ②③④ C. ②④ D. ①③④

6. 已知函数 $y = 2\sin(\omega x + \varphi) (\omega \in \mathbf{Z}^+, -\pi < \varphi < \pi)$ 的部分图象如图所示，则 ω, φ 的值分别是()



- A. $3, -\frac{\pi}{3}$ B. $3, -\frac{\pi}{6}$ C. $2, \frac{\pi}{6}$ D. $2, \frac{\pi}{3}$



7. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 6, & x \geq 0 \\ 3x + 4, & x < 0 \end{cases}$, 若互不相等的实数 x_1, x_2, x_3 满足 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 则 $x_1 + x_2 + x_3$ 的

取值范围是()

- A. $(\frac{11}{3}, 6)$ B. $(\frac{11}{3}, 6]$ C. $(\frac{20}{3}, \frac{26}{3})$ D. $(\frac{20}{3}, \frac{26}{3}]$

8. 已知函数 $f(x) = e^x + ax - 2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$. 若对于任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 都有

$x_2 \cdot f(x_1) - x_1 \cdot f(x_2) < a(x_1 - x_2)$ 成立, 则 a 的取值范围是()

- A. $[1, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(-\infty, 1]$ D. $(-\infty, 2]$

二、填空题

9. 已知 $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$, 且 α 是第二象限角, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

10. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_1, 2S_2, 3S_3$ 成等差数列, 则 $\{a_n\}$ 的公比为 _____.

11. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c . 若 $b + c = 2a$, 则 $3\sin A = 5\sin B$, 则 $\angle C =$ _____.

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \geq 0 \\ 4x - x^2, & x < 0 \end{cases}$, 若 $f(2 - a^2) > f(a)$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

13. 函数 $f(x)$ 满足下列性质:

① 定义域为 \mathbf{R} , 值域为 $[1, +\infty)$;

② 图象关于 $x = 2$ 对称;

③ 对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$.

请写出函数 $f(x)$ 的一个解析式 _____ . (只要写出一个即可)

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x^2}, & x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \\ \ln(x+1), & x \in [-\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 4x - 4$. 设 b 为实数, 若存在实数 a , 使得

$f(a) + g(b) = 0$. 则 b 的取值范围为 _____.



三、解答题

15. 已知函数 $f(x) = \sin x(\sqrt{3}\cos x - \sin x)$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
- (2) 当 $x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ 时, 求 $f(x)$ 的取值范围.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 且 $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.

- (1) 求 $\angle A$ 的大小;
- (2) 若 $\sin B + \sin C = 1$, $b = 2$, 试求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 a_n 是 S_n 和 1 的等差中项, 等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = a_1$, $b_4 = S_2$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 $c_n = \frac{1}{b_n b_{n+1}}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $\frac{1}{3} \leq T_n < \frac{1}{2}$.

18. 已知函数 $f(x) = ax - 1 - \ln x, a \in \mathbf{R}$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 对 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) \geq bx - 2$ 恒成立, 求实数 b 的取值范围.



19. 已知函数 $f(x) = (x^2 - 3x + 3)e^x$ 的定义域为 $[-2, t]$, 设 $f(-2) = m$, $f(t) = n$.

(1) 试确定 t 的取值范围, 使得函数 $f(x)$ 在 $[-2, t]$ 上为单调函数;

(2) 求证: $m < n$;

(3) 求证: 对于任意的 $t > -2$, 总存在 $x_0 \in (-2, t)$, 满足 $\frac{f'(x_0)}{e^{x_0}} = \frac{2}{3}(t-1)^2$, 又若方程 $\frac{f'(x_0)}{e^{x_0}} = \frac{2}{3}(t-1)^2$ 在 $(-2, t)$ 上有唯一解, 请确定 t 的取值范围.

20. 对于无穷数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 若 $b_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\} - \min\{a_1, a_2, \dots, a_k\} (k=1, 2, 3, \dots)$, 则称 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的

“收缩数列”. 其中, $\max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $\min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 分别表示 a_1, a_2, \dots, a_k 中的最大数和最小数.

已知 $\{a_n\}$ 为无穷数列, 其前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的“收缩数列”.

(1) 若 $a_n = 2n+1$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和;

(2) 证明: $\{b_n\}$ 的“收缩数列”仍是 $\{b_n\}$;

(3) 若 $S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{n(n+1)}{2}a_1 + \frac{n(n-1)}{2}b_n (n=1, 2, 3, \dots)$, 求所有满足该条件的 $\{a_n\}$.



专注名校多元录取

自主招生在线创立于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站 (www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2019-2020 学年高三月考试题及参考答案 (更新下载中)，点击链接获得

<http://www.zizzs.com/c/201910/39637.html>