绝密 ★ 启用前

2023 年普通高等学校招生“圆梦杯”统一模拟考试（二）

数学试卷

本试卷共 4 页，22 题。全卷满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 填空题和解答题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔分别填写在试题卷和答题卡规定的位置上。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M=\{x\mid x^2-3x<0\}$，$N=\{x\mid y=\ln(x-1)\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{x\mid 0<x<3\}$　　B. $\{x\mid 1<x<3\}$　　C. $\{x\mid 0\leqslant x<3\}$　　D. $\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$

2. 已知向量 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 的夹角为 60°，若 $|\boldsymbol{m}|=2$，$\boldsymbol{m}\perp(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})$，则 $|\boldsymbol{n}|=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，命题 p：“$a_5>0$，$a_6>0$”，命题 q：“$S_7>0$”，则命题 p 是命题 q 的

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 若正数 x，y 满足 $x+2y=2$，则 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值为

A. $\sqrt{2}+1$　　B. $2\sqrt{2}+1$　　C. 2　　D. $\dfrac{5}{2}$

5. 已知函数 $f(ax+b)$ 图像的对称轴为 $x=c$，则 $f(x)$ 图像的对称轴为

A. $x=ab+c$　　B. $x=ab-c$　　C. $x=ac+b$　　D. $x=ac-b$

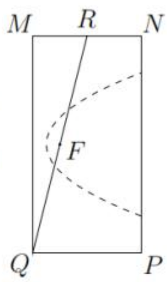
6. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 存在内切球，若 $AB=3$，$BC=4$，$AB\perp BC$，则该三棱柱外接球的表面积为

A. 26π　　B. 27π　　C. 28π　　D. 29π

7. 用 0，1，2，3，4，5 组成没有重复数字的四位数，其中能被 15 整除的有

A. 38 个　　B. 40 个　　C. 42 个　　D. 44 个

8. 在农业生产中，自动化控制技术的应用有效提高了农业生产效率. 如图所示，在某矩形试验田 $MNPQ$ 中，$MQ=2MN=4$，R 为 MN 中点，F 为 QR 中点，三角形 MQR 区域种植小麦，梯形 $RNPQ$ 区域种植玉米. 为提高劳动效率，节约用水，现采用自动浇水机器人（忽略机器人的面积）对试验田进行灌溉. 已知该机器人沿着以 F 为焦点，MQ 为准线的抛物线运动，且向以自身为圆心，半径为 $\frac{1}{8}$ 的圆形区域内浇水. 记小麦田能够被机器人灌溉的面积为 S，则



（若直线 l 与抛物线 E 相切于点 A，平行于 l 的直线 l' 与 E 交于 B、C 两点，记 BC 与 E 围成的图形面积为 S_1，$\triangle ABC$ 的面积为 S_2，则 $3S_1=4S_2$）

A. $S=\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{4}<S<\frac{49}{192}$　　C. $S=\frac{49}{192}$　　D. $S>\frac{49}{192}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每个小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 若复数 $z=\frac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$，则

A. $|z|=1$　　B. $z\cdot\bar{z}=1$　　C. $z+\bar{z}=1$　　D. $z+\frac{1}{z}=1$

10. 已知随机事件 A,B 的概率分别为 $P(A),P(B)$，且 $P(A)=\frac{1}{3},P(B)=\frac{1}{2},P(A\mid B)=P(A\mid\bar{B})$，则

A. 事件 A 与事件 B 相互独立　　B. 事件 A 与事件 B 相互对立

C. $P(A+B)=\frac{2}{3}$　　D. $P(A\bar{B}\mid\bar{B})=\frac{1}{6}$

11. 已知函数 $f(x)=a\sin^2x+b\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ 内存在两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，则

A. $|a|<|b|$　　B. $|a|>|b|$

C. $\sin\left(x_1+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x_2+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$　　D. $\cos\left(x_1+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x_2+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$

12. 已知 $m>n>0$，定义：$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[3.1]=3$，$[-2.1]=-3$. 若函数 $f(x)=[\mathrm{e}^x-ax]+\ln[ax]$，其中 $a>0$，则

A. 当 $a=1$ 时，$f(x)$ 存在零点　　B. 若 $f(x)\geqslant 1$，则 $a\in\left(0,\frac{1}{\ln 2}\right]$

C. 若 $f(n)\leqslant f(m)$，则 $a\in(0,\mathrm{e}]$　　D. 若 $f(m)=0$，则 $[\ln(am)]=0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 二项式 $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中，常数项为___▲___.（用数字作答）

14. 若 $4\sin 2\alpha+1=\cos 2\alpha$，则 $\tan\alpha=$___▲___.

15. 曲线 $C: x^2+y^2=|x+y|$ 围成的封闭图形的面积为___▲___，若直线 $y=k(x-2)$ 与 C 恰有两个公共点，则 k 的取值范围为___▲___.（第一空 2 分，第二空 3 分）

16. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=1$，点 M 是线段 CD 上的一点，且满足 $0<CM<1$. 现将 $\triangle AMD$ 与 $\triangle BMC$ 分别沿 AM，BM 进行翻折，使点 C 落到边 DM 上，得到 $\triangle AMD'$ 与 $\triangle BMC'$，若线段 $C'M$ 上存在一点 P（含端点），满足 $\angle ABP=60^\circ$，则 CM 的取值范围为___▲___.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，且 $bc=2R^2(\sqrt{3}+2\cos B\cos C)$.

（I）求 A；

（II）若 $a=1$，$b=2$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

18.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=1$，$2S_n=na_n+2(n\geqslant 2, n\in\mathbb{N}^*)$.

（I）求 a_n；

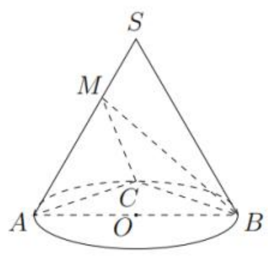
（II）记 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（12 分）

如图，S 为圆锥的顶点，O 是圆锥底面的圆心，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$AC\perp BC$，$AC=BC=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MS}$，$AS=3$，$PQ$ 为 $\odot O$ 的一条弦，且 $SB//$ 平面 PMQ.

（I）求 PQ 的最小值；

（II）若 $SA\perp PQ$，求直线 PQ 与平面 BCM 所成角的正弦值.



20.（12 分）

五一小长假到来，多地迎来旅游高峰期，各大旅游景点都推出了种种新奇活动以吸引游客，小明去成都某熊猫基地游玩时，发现了一个趣味游戏，游戏规则为：在一个足够长的直线轨道的中心处有一个会走路的机器人，游客可以设定机器人总共行走的步数，机器人每一步会随机选择向前行走或向后行走，且每一步的距离均相等，若机器人走完这些步数后，恰好回到初始位置，则视为胜利.

（I）若小明设定机器人一共行走 4 步，记机器人的最终位置与初始位置的距离为 X 步，求 X 的分布列和期望；

（II）记 $p_i(i\in\mathbb{N}^*)$ 为设定机器人一共行走 $2i$ 步时游戏胜利的概率，求 p_i，并判断当 i 为何值时，游戏胜利的概率最大；

（III）该基地临时修改了游戏规则，要求机器人走完设定的步数后，恰好第一次回到初始位置，才视为胜利. 小明发现，利用现有的知识无法推断设定多少步时获得胜利的概率最大，于是求助正在读大学的哥哥，哥哥告诉他，“卡特兰数”可以帮助他解决上面的疑惑：将 n 个 0 和 n 个 1 排成一排，若对任意的 $1\leqslant k\leqslant 2n$，在前 k 个数中，0 的个数都不少于 1 的个数，则满足条件的排列方式共有 $C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1}$ 种，其中，$C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1}$ 的结果被称为卡特兰数. 若记 P_i 为设定机器人行走 $2i$ 步时恰好第一次回到初始位置的概率，证明：对（II）中的 p_i，有 $P_i=\dfrac{p_i}{2i-1}(i\in\mathbb{N}^*)$.

21.（12 分）

已知抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$，双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{p^2}=1$，点 $A(x_1,y_1)$ 在 C 的左支上，过 A 作 x 轴的平行线交 E 于点 M，过 M 作 E 的切线 l_1，过 A 作直线 l_2 交 l_1 于点 P，交 E 于点 N，且 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PN}$.

（I）证明：l_2 与 E 相切；

（II）过 N 作 x 轴的平行线交 C 的左支于点 $B(x_2,y_2)$，过 P 的直线 l_3 平分 $\angle MPN$，记 l_3 的斜率为 k，$\angle MPN=\theta$，若 $\cos\theta=-k^2$，证明：$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ 恒为定值.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=(e^{x-a}-a)\ln x+x+\dfrac{1}{x}$.

（I）当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（II）若 $f(x)\geqslant 2a$，求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。