联考联合体2020年高三12月联考

数　学

时量:120分钟　　　满分:150分

得分__________

一、单项选择题(本题共**8**小题,每小题**5**分,共**40**分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.)

1. 设集合 $A=\{x|x^2-x-2>0\}$,$B=\{x|0<x<3\}$,则 $A\cap B=$

A. (0,2)　　B. (1,2)　　C. (1,3)　　D. (2,3)

2. 若 $\frac{a-i}{3+2i}$ 为纯虚数,则实数 a 的值为

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

3. 平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$,则向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为

A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

4.《易经》是中国文化中的精髓,右图是易经八卦图(含乾、坤、巽、震、坎、离、艮、兑八卦),每一卦由三根线组成(▬▬▬ 表示一根阳线,▬ ▬ 表示一根阴线),从八卦中任取一卦,这一卦的三根线中恰有1根阳线和2根阴线的概率为

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{1}{2}$

5. 已知两个变量具备线性相关性,现通过最小二乘法求回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$,将已知数据代入公式 $Q=\sum_{i=1}^{n}(y_i-bx_i-a)^2$ 计算后得到的代数式为:$3a^2+13b^2+12ab-2b+3$,使上述代数式取值最小的 a,b 的值即为回归方程的系数,则回归直线方程为

A. $\hat{y}=-x+2$　　B. $\hat{y}=-x-2$

C. $\hat{y}=x+2$　　D. $\hat{y}=x-2$

6. 某单位有 6 名员工，2020 年国庆节期间，决定从 6 人中留 2 人值班，另外 4 人分别去张家界、南岳衡山、凤凰古城、岳阳楼旅游，要求每个景点有 1 人游览，每个人只游览一个景点，且这 6 个人中甲、乙不去衡山，则不同的选择方案共有

A. 120 种　　B. 180 种　　C. 240 种　　D. 320 种

7. 已知数列$\{a_n\}$前 n 项和为 S_n，命题 p：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，命题 q：$\{a_n\}$为等差数列，则 p 是 q 成立的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

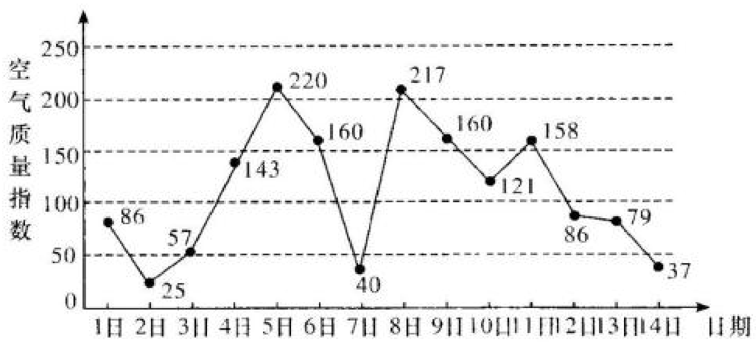
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知 A、B 分别为椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右顶点，P 为椭圆 C 上一动点，PA、PB 与直线 $x=3$ 交于 M、N 两点，$\triangle PMN$ 与$\triangle PAB$ 的外接圆的周长分别为 L_1，L_2，则$\frac{L_1}{L_2}$的最小值为

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{1}{4}$

二、**多项选择题**（本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 **5** 分，部分选对的得 **3** 分，有选错的得 **0** 分.）

9. 空气质量指数大小分为五级，指数越大，说明污染的情况越严重，对人体危害越大. 指数范围在：[0,50]，[51,100]，[101,200]，[201,300]，[301,500]分别对应“优”、“良”“轻（中）度污染”、“中度（重）污染”、“重污染”五个等级. 下面是某市连续 14 天的空气质量指数趋势图，下列说法正确的有



A. 这 14 天中有 4 天空气质量指数为“良”

B. 这 14 天中空气质量指数的中位数是 103

C. 从 2 日到 5 日空气质量越来越差

D. 连续三天中空气质量指数方差最小的是 9 日到 11 日

10. 设动点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 上(含内部),且 $\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1B}$,当 $\angle APC$ 为锐角时,实数 λ 可能的取值是

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

11. 在△ABC 中,下列说法正确的是

A. 若 $A>B$,则 $\sin A>\sin B$

B. 存在△ABC 满足 $\cos A+\cos B\leqslant 0$

C. 若 $\sin A<\cos B$,则△ABC 为钝角三角形

D. 若 $C>\frac{\pi}{2}$,则 $\sin C>\sin^2 A+\sin^2 B$

12. 已知 $a>0$,$m(x)=e^{x-2}-e^{2-x}$,$f(x)=am(x)-\sin \pi x$,若 $f(x)$ 存在唯一零点,下列说法正确的有

A. $m(x)$在 $\mathbf{R}$ 上递增

B. $m(x)$图象关于点$(2,0)$中心对称

C. 任取不相等的实数 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 均有$\frac{m(x_1)+m(x_2)}{2}<m\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

D. $a\geqslant\frac{\pi}{2}$

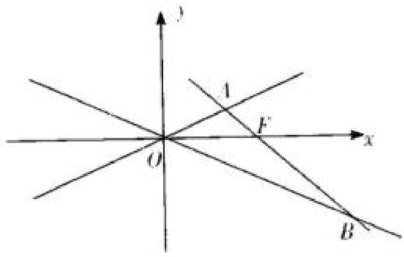
三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.)

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>0,\\ 2^{-x}+2, x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=$________.

14. 某圆锥母线长为 4,其侧面展开图为半圆面,则该圆锥高为________.

15. 已知三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 100π,$PB\perp$ 平面 ABC,$PB=8$,$\angle BAC=120^\circ$,则三棱锥体积的最大值为________.

16. 如图,已知 F 为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点,过点 F 的直线交两渐近线于 A,B 两点,若 $\angle OAB=120^\circ$,△OAB 内切圆的半径 $r=\frac{\sqrt{3}a-b}{5}$,则双曲线的离心率为________.



四、解答题（本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

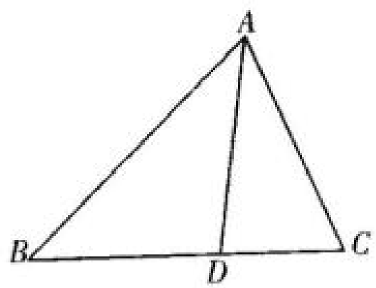
17.（本题满分10分）

在①$S_n+S_{n-2}=2(S_{n-1}+1)$；②$S_{n+1}+2=S_{n-2}-a_{n-1}$；③$\frac{S_n}{n}=a_{n+1}-(n+1)$这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答该问题.

问题：已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，________.若确定$\{a_n\}$是等差数列，求$\{a_n\}$的通项公式，否则，说明理由.

（注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分）

18.（本题满分12分）



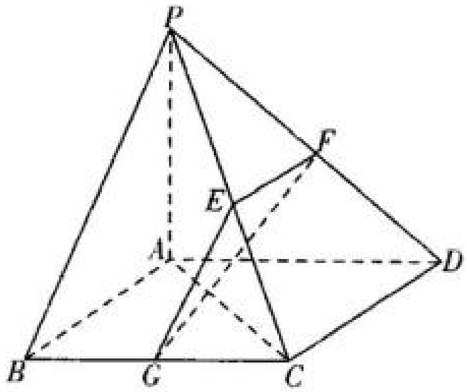
在△ABC中，$\angle B=\frac{\pi}{3}$，$AB=15$，点D在边BC上，

$CD=1$，$\cos\angle ADC=\frac{1}{26}$.

(1)求$\sin\angle BAD$；

(2)求△ABC的面积.

19.（本题满分 12 分）



四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=120°$，$PA\perp$底面 $ABCD$，$PA=2\sqrt{3}$，E，F 分别是 PC，PD 的中点.

(1) 已知 $\overrightarrow{BG}=\lambda\overrightarrow{BC}$，若平面 EFG // 平面 PAB，求 λ 的值；

(2) 在(1)的条件下，求平面 EFG 与平面 PCD 所成二面角的正弦值.

20.（本题满分 12 分）

已知 A，B 分别为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点，过点 $M(2,0)$ 任作一条非水平直线交椭圆于 P，Q 两点，若椭圆长轴长为 8，且过点 $\left(3,\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 记直线 AP，BQ 的斜率分别为 k_1，k_2，则 $\frac{k_1}{k_2}$ 是否为定值，若是，求出该定值，若不是，请说明理由.

21.(本题满分 12 分)

有编号为 1,2,3 的三只小球,和编号为 1,2,3,4 的四个盒子,将三个小球逐个随机的放入四个盒子中,每只球的放置相互独立.

(1)求三只小球恰在两个盒子中的概率;

(2)求三只小球在三个不同的盒子,且至少有两个球的编号与所在盒子编号不同的概率;

(3)记录至少有一只球的盒子,以 X 表示这些盒子编号的最大值,求 EX.

22.(本题满分 12 分)

已知 $f(x)=ae^{2x}+(2a-1)e^{x}-x$,$a$ 为常数.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant(3a-1)\cos x$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

炎德·英才联考联合体2020年高三12月联考

数学参考答案

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	C	D	C	C	A

1. D 【解析】$A=\{x|x>2$ 或 $x<-1\}$，则 $A\cap B=(2,3)$.

2. C 【解析】$\frac{a-i}{3+2i}=\frac{(a-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{(3a-2)-(2a+3)i}{13}$，则 $\begin{cases}3a-2=0,\\-(2a+3)\neq0,\end{cases}$ 所以 $a=\frac{2}{3}$.

3. B 【解析】$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-6}{\sqrt{5}\times3}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4. C 【解析】$p=\frac{m}{n}=\frac{3}{8}$.

5. D 【解析】$3a^2+13b^2+12ab-2b+3=3(a+2b)^2+(b-1)^2+2$，

当 $\begin{cases}a+2b=0,\\b-1=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=-2,\\b=1\end{cases}$ 时上式最小，故 $\hat{y}=x-2$.

6. C 【解析】方法1：以人为对象，分类讨论：甲不值班乙值班：$C_4^3C_3^1A_3^3=72$；甲值班乙不值班：$C_4^3C_3^1A_3^3=72$；

甲乙都不值班：$C_4^2C_2^1A_3^3=72$；甲乙都值班：$A_4^4=24$，故 $N=72+72+72+24=240$；

方法2：以地点为对象，依次考虑各景点可能人数：$N=4\times5\times4\times3=240$.

7. C 【解析】若 p 成立，则 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，则 $S_{n+1}=\frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}$，

两式相减得：$a_{n+1}=\frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}-\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，即 $(n-1)a_{n+1}-na_n+a_1=0$，

于是：$na_{n+2}-(n+1)a_{n+1}+a_1=0$，再将以上两式相减得：$na_{n+2}-2na_{n+1}+na_n=0$，

即 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$，所以 $\{a_n\}$ 为等差数列，故命题 q 成立；而 q 成立，p 显然成立.

8. A 【解析】容易知道 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{4}$，设 $l_{PA}:y=k(x+2)$，$l_{PB}:y=-\frac{1}{4k}(x-2)$，令 $x=3$ 得 $y_M=5k$，$y_N=-\frac{1}{4k}$，不妨设 $k>0$，则 $MN=5k+\frac{1}{4k}$，设△PMN 和△PAB 外接圆的半径分别为 r_1,r_2，由正弦定理得：$2r_1=\frac{MN}{\sin\angle MPN}$，$2r_2=\frac{AB}{\sin\angle APB}$，又 $\angle MPN+\angle APB=180°$，所以：$\frac{L_1}{L_2}=\frac{2\pi r_1}{2\pi r_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{MN}{AB}=\frac{5k+\frac{1}{4k}}{4}\geqslant\frac{2\sqrt{5k\cdot\frac{1}{4k}}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

二、多项选择题

题号	9	10	11	12
答案	ACD	CD	ACD	ABD

9. ACD 【解析】14天中有：1日，3日，12日，13日空气质量指数为良，共4天，故A对；

14天中的中位数为：$\frac{86+121}{2}=103.5$，故B错；

从2日到5日空气质量指数越来越高，故空气质量越来越差，故C对；D答案显然成立.

10. CD 【解析】设 $AP=x,D_1P=t$，设正方体的棱长为 1，则 $AC=\sqrt{2}$，在△APC 中，由余弦定理得

$\cos\angle APC=\frac{x^2+x^2-2}{2x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$，若∠$APC$ 为锐角，则 $\frac{x^2-1}{x^2}>0$，则 $x^2>1$，

在△AD_1P 中，$AD_1=\sqrt{2}$，$\cos\angle AD_1P=\frac{\sqrt{6}}{3}$，于是由余弦定理得

$x^2=2+t^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot t\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}$，于是 $2+t^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot t\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}>1$，即 $3t^2-4\sqrt{3}t+3>0$，

解之得：$t>\sqrt{3}$ 或 $t<\frac{\sqrt{3}}{3}$，由 $D_1B=\sqrt{3}$，故 $\lambda>1$(舍)或 $0<\lambda<\frac{1}{3}$.

11. ACD 【解析】对于 A 选项，若 $A>B$ 则 $a>b$，则 $2R\sin A>2R\sin B$，即 $\sin A>\sin B$，故 A 选项正确；

对于 B 选项，由 $A+B<\pi$，则 $A<\pi-B$，于是 $\cos A>-\cos B$，即 $\cos A+\cos B>0$，故 B 选项错误；

对于 C 选项，由 $\sin A<\cos B$ 得 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)<\cos B$，此时：若 $0<A<\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{2}-A>B$，则 $A+B<\frac{\pi}{2}$，于是 $C>\frac{\pi}{2}$；若 $A>\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\left(A-\frac{\pi}{2}\right)<\cos B$，则 $A-\frac{\pi}{2}>B$，于是 $A>\frac{\pi}{2}+B$，故 C 选项正确；

对于 D 选项，由 $C>\frac{\pi}{2}$，则 $A+B<\frac{\pi}{2}$，则 $0<A<\frac{\pi}{2}-B<\frac{\pi}{2}$，于是 $\sin A<\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$，

即 $0<\sin A<\cos B$，同理 $0<\sin B<\cos A$，

此时 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B>\sin A\cdot\sin A+\sin B\cdot\sin B=\sin^2A+\sin^2B$. 所以 D 选项正确.

12. ABD 【解析】由 $m'(x)=e^{x-2}+e^{2-x}>0$ 知 $m(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增，故 A 选项正确；

$m(x)+m(4-x)=e^{x-2}-e^{2-x}+e^{2-x}-e^{x-2}=0$，故 $m(x)$ 图象关于点 $(2,0)$ 中心对称，故 B 选项正确；

由 $m''(x)=e^{x-2}-e^{2-x}$，当 $x>2$ 时，$m''(x)>0$，$m'(x)$ 递增，$m(x)$ 图象下凸，此时 $\frac{m(x_1)+m(x_2)}{2}>m\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，故 C 选项错误；

对于 D 选项：

解法 1：$f(x)=a(e^{x-2}-e^{2-x})-\sin\pi x$，注意到 $f(2-x)=-f(2+x)$，故 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 中心对称，而 $f(2)=0$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有唯一零点等价于 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 无零点，

$f'(x)=a(e^{x-2}+e^{2-x})-\pi\cos\pi x$，

当 $a\geqslant\frac{\pi}{2}$ 时，因为 $e^{x-2}+e^{2-x}\geqslant 2$，则 $f'(x)\geqslant 2a-\pi\cos\pi x\geqslant 2a-\pi\geqslant 0$.

于是 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 递增，于是当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f(x)>f(2)=0$，满足题意；

当 $a<\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(2)=2a-\pi<0$，由连续函数的性质可知，一定存在 $x_0>2$，使得 $x\in(2,x_0)$ 时 $f'(x)<0$，

则 $f(x)$ 在 $(2,x_0)$ 单调递减，于是 $x\in(2,x_0)$ 时 $f(x)<f(2)=0$，

而 $a<\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\pi}{a}>2$，$\frac{a^2}{\pi}<\frac{\pi}{4}$，$2+\ln\frac{\pi}{a}>2$，

$f\left(2+\ln\frac{\pi}{a}\right)=a\left(e^{\ln\frac{\pi}{a}}-e^{-\ln\frac{\pi}{a}}\right)-\sin\left(2\pi+\pi\ln\frac{\pi}{a}\right)=a\left(\frac{\pi}{a}-\frac{a}{\pi}\right)-\sin\left(\pi\ln\frac{\pi}{a}\right)$

$\geqslant\pi-\frac{a^2}{\pi}-1>\pi-\frac{\pi}{4}-1>0$，

由零点存在定理，在区间 $\left(2,2+\ln\frac{\pi}{a}\right)$ 上 $f(x)$ 一定还存在零点，与已知矛盾.

故 $a\geqslant\frac{\pi}{2}$.

解法 2:若 $f(x)$存在唯一零点,则 $a(e^{x-2}-e^{2-x})=\sin\pi x$ 只有一个解,即 $g(x)=a(e^{x-2}-e^{2-x})$与 $h(x)=\sin\pi x$ 只有一个交点,$g'(x)=a(e^{x-2}+e^{2-x})$,$h'(x)=\pi\cos\pi x$,由 $g(2)=h(2)=0$,$g(x)$、$h(x)$的图象均关于点(2,0)中心对称,在 $x=2$ 的右侧附近,$g(x)$为下凸函数,$h(x)$为上凸函数,要 $x>2$ 时图象无交点,当且仅当 $g'(2)\geqslant h'(2)$成立,于是 $2a\geqslant\pi$,即 $a\geqslant\frac{\pi}{2}$,故 D 选项正确.

三、填空题

13. 4 【解析】$f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{1}{2}=-1$,$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(-1)=2^{-(-1)}+2=4$.

14. $2\sqrt{3}$ 【解析】圆锥底面半径 $r=2$,$h=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

15. $6\sqrt{3}$ 【解析】设△ABC 三边的长分别为 a,b,c,$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}bc\sin120°\cdot8=\frac{2\sqrt{3}}{3}bc$,设球的半径为 R,由 $4\pi R^2=100\pi$ 得 $R^2=25$.设△ABC 外接圆的半径为 r,由正弦定理得 $2r=\frac{a}{\sin120°}$,即 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,$R^2=4^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2=25$,所以 $a=3\sqrt{3}$,$27=b^2+c^2-2bc\cdot\cos120°$,即 $27=b^2+c^2+bc\geqslant2bc+bc=3bc$,故 $bc\leqslant9$,$V=\frac{2\sqrt{3}}{3}bc\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}\times9=6\sqrt{3}$,当且仅当 $b=c=3$ 时取等号.

16. $\frac{\sqrt{19}}{4}$ 【解析】由焦点 F 到渐近线的距离为 b,$\angle OAB=120°$知 $AF=\frac{2\sqrt{3}}{3}b$,

在△OAF 中,由余弦定理得 $OF^2=OA^2+AF^2-2\cdot OA\cdot AF\cdot\cos120°$,

即 $c^2=OA^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}b\right)^2-2\cdot OA\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}b\cdot\cos120°$,解之得:$OA=a-\frac{\sqrt{3}}{3}b$.

设△OAB 内心为 M,作 $MN\perp OA$ 于 N,显然$\angle MAO=60°$,$MN=r=\frac{\sqrt{3}a-b}{5}$,

则 $AN=\frac{\sqrt{3}}{3}MN=\frac{3a-\sqrt{3}b}{15}$,则 $ON=OA-AN=a-\frac{\sqrt{3}}{3}b-\frac{3a-\sqrt{3}b}{15}=\frac{12a-4\sqrt{3}b}{15}$,

$\tan\angle MON=\frac{MN}{ON}=\frac{\frac{\sqrt{3}a-b}{5}}{\frac{12a-4\sqrt{3}b}{15}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,即 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{19}}{4}$.

四、解答题

17.【解析】若选①,由 $S_n+S_{n-2}=2(S_{n-1}+1)$成立,则必须 $n\geqslant3$, ………… 2 分

此时 $S_n-S_{n-1}=S_{n-1}-S_{n-2}+2$,即 $a_n=a_{n-1}+2(n\geqslant3)$, ………… 5 分

这只能说明数列$\{a_n\}$从第 2 项开始构成等差数列, ………… 8 分

数列通项公式无法确定. ………… 10 分

若选②,由 $S_{n+1}+2=S_{n+2}-a_{n+1}$,得 $S_{n+2}-S_{n+1}-a_{n+1}=2$,即 $a_{n+2}-a_{n+1}=2$, ………… 2 分

即 $a_{n+1}-a_n=2(n\geqslant2)$. ………… 5 分

这只能说明数列$\{a_n\}$从第 2 项开始构成等差数列, ………… 8 分

数列通项公式无法确定. ………… 10 分

若选③,由$\frac{S_n}{n}=a_{n+1}-(n+1)$得 $S_n=na_{n+1}-n(n+1)$,

于是 $S_{n+1}=(n+1)a_{n+2}-(n+1)(n+2)$，两式相减得：$(n+1)a_{n+1}=(n+1)a_{n+2}-2(n+1)$， ………… 2 分

即 $a_{n+2}=a_{n+1}+2$， …………………………………………………………………… 5 分

对 $S_n=na_{n+1}-n(n+1)$，令 $n=1$ 得 $a_2=a_1+2$， ……………………………………… 7 分

故数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列， …………………………………………………… 8 分

即 $a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$. ………………………………………………………… 10 分

18.【解析】(1) 由 $\cos\angle ADC=\frac{1}{26}$，知 $\sin\angle ADC=\sqrt{1-\left(\frac{1}{26}\right)^2}=\frac{15\sqrt{3}}{26}$， ……………………………… 2 分

则 $\sin\angle BAD=\sin(\angle ADC-60^\circ)=\sin\angle ADC\cdot\cos 60^\circ-\cos\angle ADC\cdot\sin 60^\circ$ ……………… 3 分

$=\frac{15\sqrt{3}}{26}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{26}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{26}$. ……………………………………………………… 5 分

(2) 在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得：$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，即 $\frac{BD}{\frac{7\sqrt{3}}{26}}=\frac{15}{\frac{15\sqrt{3}}{26}}$， ……………………… 7 分

即 $BD=7$. ………………………………………………………………………………… 8 分

所以 $BC=7+1=8$，

于是 $S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABD$ ……………………………………………………… 10 分

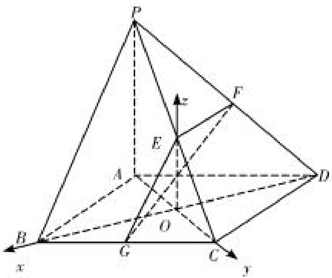
$=\frac{1}{2}\times 15\times 8\times\sin 60^\circ=30\sqrt{3}$. ……………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1) 若平面 EFG // 平面 PAB，平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$，平面 $EFG\cap$ 平面 $PBC=EG$，

由面面平行的性质定理可知：PB // EG， ………………………………………………… 2 分

于是 $\frac{CG}{GB}=\frac{CE}{EP}$，由 E 为 PC 的中点知：G 为 BC 的中点，故 $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，

所以 $\lambda=\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………………………… 4 分



(2) 由平面 EFG // 平面 PAB 知，平面 EFG 与平面 PCD 所成二面角即为平面 PAB 与平面 PCD 所成二面角. 连接 BD，交 AC 于点 O，因为四边形 $ABCD$ 为菱形，则 $AC\perp BD$，以点 O 为坐标原点，以 OB、OC 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，过点 O 与底面 $ABCD$ 垂直的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系， …………………………………………………………………… 6 分

则 $A(0,-1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(-\sqrt{3},0,0)$，$P(0,-1,2\sqrt{3})$.

于是 $\overrightarrow{AP}=(0,0,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,-2,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{3},-1,0)$，设平面 PAB 的法向量为

$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2\sqrt{3}z=0,\\ \sqrt{3}x+y=0.\end{cases}$

取 $x=1$，则 $y=-\sqrt{3}$，$z=0$，于是 $\boldsymbol{n}_1=(1,-\sqrt{3},0)$. ……………………………………… 8 分

同理可求得平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(-1,\sqrt{3},1)$， ………………………………… 9 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{-1-3}{\sqrt{1+(-\sqrt{3})^2}\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2+1}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$， ………………… 11 分

所以二面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$. ………………………………………………………………… 12 分

20.【解析】由题意知：$\begin{cases}2a=8,\\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{63}{16b^2}=1,\end{cases}$ ………………………… 2 分

解之得：$\begin{cases}a=4,\\ b=3,\end{cases}$ 故椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$. ………………………… 4 分

(2)设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，设直线 PQ 的方程为：$x=\lambda y+2$. ………………………… 5 分

由 $\begin{cases}x=\lambda y+2,\\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}$ 得 $(9\lambda^2+16)y^2+36\lambda y-108=0$，显然 $\Delta>0$， ………………………… 6 分

于是：$y_1+y_2=\dfrac{-36\lambda}{9\lambda^2+16}$，$y_1y_2=\dfrac{-108}{9\lambda^2+16}$. ………………………… 7 分

$\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{y_1}{x_1+4}\cdot\dfrac{x_2-4}{y_2}=\dfrac{y_1(\lambda y_2-2)}{(\lambda y_1+6)y_2}=\dfrac{\lambda y_1y_2-2y_1}{\lambda y_1y_2+6y_2}$ ………………………… 8 分

$=\dfrac{\lambda y_1y_2-2(y_1+y_2)+2y_2}{\lambda y_1y_2+6y_2}$

$=\dfrac{\lambda\cdot\dfrac{-108}{9\lambda^2+16}-2\cdot\dfrac{-36\lambda}{9\lambda^2+16}+2y_2}{\lambda\cdot\dfrac{-108}{9\lambda^2+16}+6y_2}=\dfrac{-36\lambda+2y_2(9\lambda^2+16)}{-108\lambda+6y_2(9\lambda^2+16)}=\dfrac{1}{3}$. ………………………… 12 分

21.【解析】(1)设“三只小球恰在两个盒子中”为事件 A，则 $P(A)=\dfrac{C_3^1A_4^2}{4^3}=\dfrac{9}{16}$. ………………………… 3 分

(2)设“恰有两个球的编号与盒子编号不同”为事件 B，“三个球的编号与盒子的编号不同”为事件 C，则“至少有两个球的编号与所在盒子编号不同”为事件：$B+C$，

$P(B)=\dfrac{C_3^1(1+2)}{4^3}=\dfrac{9}{64}$， ………………………… 4 分

$P(C)=\dfrac{2+C_3^2\times3}{4^3}=\dfrac{11}{64}$， ………………………… 5 分

B 与 C 互斥，

故 $P(B+C)=P(B)+P(C)=\dfrac{9}{64}+\dfrac{11}{64}=\dfrac{5}{16}$. ………………………… 6 分

(3)$X=1,2,3,4$. ………………………… 7 分

$P(X=1)=\dfrac{1}{4^3}=\dfrac{1}{64}$； ………………………… 8 分

$P(X=2)=\dfrac{2^3-1}{4^3}=\dfrac{7}{64}$； ………………………… 9 分

$P(X=3)=\dfrac{3^3-2^3}{4^3}=\dfrac{19}{64}$； ………………………… 10 分

$P(X=4)=\dfrac{4^3-3^3}{4^3}=\dfrac{37}{64}$； ………………………… 11 分

故 $E(X)=1\times\dfrac{1}{64}+2\times\dfrac{7}{64}+3\times\dfrac{19}{64}+4\times\dfrac{37}{64}=\dfrac{55}{16}$. ………………………… 12 分

22.【解析】(1)$f'(x)=(2ae^x-1)(e^x+1)$， ………………………… 2 分

当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减； ………………………… 3 分

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$ 得，$x>\ln\dfrac{1}{2a}$；由 $f'(x)<0$ 得，$x<\ln\dfrac{1}{2a}$.

故 $f(x)$在$\left(-\infty,\ln\frac{1}{2a}\right)$递减，在$\left(\ln\frac{1}{2a},+\infty\right)$递增. ………………………………………… 4 分

(2)由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\geqslant 0$ 得，$ae^{\pi}+(2a-1)e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\geqslant 0$，$a(e^{\pi}+2e^{\frac{\pi}{2}})\geqslant e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}$，$\therefore a>0$. ……………………… 5 分

①当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，由(1)知，$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.$\therefore f(x)\geqslant f(0)=3a-1\geqslant(3a-1)\cos x$，……… 6 分

②当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，令 $g(x)=f(x)-(3a-1)\cos x$.

则 $g'(x)=2ae^{2x}+(2a-1)e^{x}-1+(3a-1)\sin x\geqslant f'(x)-|3a-1|$，

$g'(0)=4a-2<0$，$g(0)=0$，

当$\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$时，$g'(x)\geqslant f'(x)-|3a-1|=2ae^{2x}+(2a-1)e^{x}-3a$，

由 $2ae^{2x}+(2a-1)e^{x}-3a=0$ 得，$x=\ln\left(\frac{1-2a+\sqrt{28a^2-4a+1}}{4a}\right)>0$，

$\therefore x\geqslant\ln\frac{1-2a+\sqrt{28a^2-4a+1}}{4a}$时，$g'(x)\geqslant g'\left(\ln\frac{1-2a+\sqrt{28a^2-4a+1}}{4a}\right)\geqslant 0$，

从而，由零点存在定理知，存在 $x_0\in\left(0,\ln\frac{1-2a+\sqrt{28a^2-4a+1}}{4a}\right]$，使得 $g'(x_0)=0$.

当 $x\in(0,x_0)$时，$g'(x)<0$，此时，$g(x)\leqslant g(0)=0$，不合题意. ……………………………………… 9 分

当 $0<a\leqslant\frac{1}{3}$时，$g'(x)\geqslant f'(x)-|3a-1|=2ae^{2x}+(2a-1)e^{x}+3a-2$，

由 $2ae^{2x}+(2a-1)e^{x}+3a-2=0$ 得，$x=\ln\left(\frac{1-2a+\sqrt{-20a^2+12a+1}}{4a}\right)>0$，

$\therefore x\geqslant\ln\frac{1-2a+\sqrt{-20a^2+12a+1}}{4a}$时，$g'(x)\geqslant g'\left(\ln\frac{1-2a+\sqrt{-20a^2+12a+1}}{4a}\right)\geqslant 0$，

从而，由零点存在定理知，存在 $x_1\in\left(0,\ln\frac{1-2a+\sqrt{-20a^2+12a+1}}{4a}\right]$，使得 $g'(x_1)=0$，

当 $x\in(0,x_1)$时，$g'(x)<0$，此时，$g(x)\leqslant g(0)=0$，不合题意. ……………………………………… 11 分

综上，$a\geqslant\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “ 专业、专注、有态度 ” 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。