

南充市高 2023 届高考适应性考试（一诊）

理科数学参考答案

一. 选择题： 本题共 12 小题， 每小题 5 分， 共 60 分.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	A	A	D	C	A	C	D	C	B	A

二. 填空题： 本题共 4 小题， 每小题 5 分， 共 20 分.

13. 35 14. -1 15. 52π 16. $[\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1]$

三. 解答题

17. 解：（1）因为 $\vec{m} = (\sqrt{3} \cos A, \sin A)$ ， $\vec{n} = (1, -1)$ ， $\vec{m} \perp \vec{n}$.

所以 $\sin A = -\sqrt{3} \cos A$ ，2 分

可得 $\tan A = -\sqrt{3}$ ， 又 $A \in (0, \pi)$4 分

所以 $A = \frac{2\pi}{3}$ 6 分

（2） $a \sin B - c \sin A = 0$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 可得

$ab = ca$ 8 分

则 $b = c$ ， 又 $a = 2\sqrt{6}$ ， $A = \frac{2\pi}{3}$.

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ， 得 $b = c = 2\sqrt{2}$ 10 分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ 12 分

18. 解：（1）由频率分布直方图表，

$10(m + 0.0025 + 0.0050 + 0.0100 + 0.0150 + 0.020 + 0.0250) = 1$

得 $m = 0.0225$ 2 分

$\bar{x} = 35 \times \frac{5}{200} + 45 \times \frac{30}{200} + 55 \times \frac{40}{200} + 65 \times \frac{50}{200} + 75 \times \frac{45}{200} + 85 \times \frac{20}{200} + 95 \times \frac{10}{200} = 65$

所以这 200 人得分的平均值 $\bar{x} = 65$ 5 分

（2）Y 的所有取值为 0， 100， 200， 300，6 分

$$\begin{aligned}
 P(Y=0) &= C_3^0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \\
 P(Y=100) &= C_3^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27} \\
 P(Y=200) &= C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{12}{27} \\
 P(Y=300) &= C_3^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{8}{27}
 \end{aligned}$$

.....10 分

Y	0	100	200	300
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

.....11 分

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{27} + 100 \times \frac{2}{9} + 200 \times \frac{4}{9} + 300 \times \frac{1}{27} = 200 \quad \text{.....12 分}$$

19. (1) 取 AD 中点 O , 连接 OC, OE , 易得 $OE \perp AD, OC \perp AD$.

在 $\triangle COE$ 中, 由已知 $CE=3, OC=AB=\sqrt{3}, OE=\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2}=\sqrt{6}$.

$$\therefore OC^2 + OE^2 = CE^2$$

$$\therefore OE \perp OC.$$

又 $OE \perp AD$,

$$OC \cap AD = O \quad \text{.....3 分}$$

$$\text{则 } OE \perp \text{平面 } ABCD \quad \text{.....4 分}$$

又 $OE \subset \text{平面 } ADE$

$$\text{故平面 } EAD \perp \text{平面 } ABCD \text{ 得证} \quad \text{.....6 分}$$

(2) 以 O 为原点, 分别以射线 OC, OA, OE 为 x, y, z 轴正半轴.

建立如图所示空间直角坐标系.

$$\text{则 } A(0, \sqrt{2}, 0), B(\sqrt{3}, \sqrt{2}, 0), D(0, -\sqrt{2}, 0), E(0, 0, \sqrt{6}).$$

$$\text{则 } \vec{EB} = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{6}), \vec{AE} = (0, -\sqrt{2}, \sqrt{6}), \vec{AD} = (0, -2\sqrt{2}, 0).$$

$$\text{在棱 } EB \text{ 上的点 } F \text{ 满足 } \vec{EF} = \frac{1}{3} \vec{EB}$$

$$\text{则 } \vec{EF} = \frac{1}{3}(\sqrt{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{6}), \vec{AF} = \vec{AE} + \vec{EF} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right).$$

设平面 ADF 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AF} = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{AD} = 0. \end{cases}$$

令 $z=1$, 得平面 ADF 的一个法向量 $m=(-2\sqrt{2}, 0, 1)$ 10 分

又平面 EAD 的一个法向量 $n=(1, 0, 0)$

$$\text{整理得} |\cos \langle m, n \rangle| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

故二面角 $E-AD-F$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 12 分

$$20. (1) \text{解: } f(x) = x \ln x - x - \frac{ax^2}{2} + 1 (x > 0, a \in \mathbf{R})$$

$$\text{当 } a=1 \text{ 时, } f(x) = x \ln x - x - \frac{x^2}{2} + 1 (x > 0)$$

$$\text{因为 } f'(x) = \ln x - x (x > 0), \quad f(1) = -\frac{1}{2}, \quad f'(1) = -1 \text{ 2 分}$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 在 } (1, f(1)) \text{ 处的切线方程为: } y + \frac{1}{2} = -(x-1).$$

$$\text{即 } 2x + 2y - 1 = 0 \text{ 4 分}$$

$$(2) \text{ 由 } f(x) = x \ln x - x - \frac{ax^2}{2} + 1 (x > 0, a \in \mathbf{R})$$

$$\text{得 } f'(x) = \ln x - ax (x > 0) \text{ 5 分}$$

因为函数 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 .

所以 $f'(x) = \ln x - ax = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个不同的变号零点 x_1, x_2 . 不妨设 $0 < x_1 < x_2$.

$$\text{由于 } \begin{cases} \ln x_1 - ax_1 = 0 \\ \ln x_2 - ax_2 = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \ln \frac{x_2}{x_1} = a(x_2 - x_1), \text{ 则 } \frac{1}{a} = \frac{(x_2 - x_1)}{\ln \frac{x_2}{x_1}} > 0 \text{ 7 分}$$

$$\text{要证: } x_1 x_2 < \frac{1}{a^2}$$

$$\text{只需证: } x_1 x_2 < \left(\frac{x_2 - x_1}{\ln \frac{x_2}{x_1}} \right)^2$$

$$\text{只需证: } \sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_2 - x_1}{\ln \frac{x_2}{x_1}}$$

$$\text{只需证: } \ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \text{ 9 分}$$

令 $\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = t$, 则 $t > 1$, 只需证: $2\ln t < t - \frac{1}{t}$ 10 分

构造函数 $h(t) = 2\ln t - t + \frac{1}{t}$, ($t > 1$).

因为 $h'(t) = \frac{2}{t} - 1 - \frac{1}{t^2} = -\frac{(t-1)^2}{t^2} < 0$,11 分

所以 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减

因为 $t > 1$, 所以 $h(t) < h(1) = 0$.

故原不等式成立12 分

21. 解: (1) 因为点 $Q(1, 2)$ 在焦点为 F 的抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上.

所以 $2^2 = 2p \times 1$ 2 分

得 $p = 2$,

所以抛物线的方程为 $y^2 = 4x$ 4 分

(2) 设 $P(x_0, y_0)$, $M(-1, m)$, $N(-1, n)$, 则

直线 PM 的方程为 $y - m = \frac{y_0 - m}{x_0 + 1}(x + 1)$,

即 $(y_0 - m)x - (x_0 + 1)y + mx_0 + y_0 = 0$ 5 分

因为直线 PM 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切

所以 $\frac{|mx_0 + y_0|}{\sqrt{(y_0 - m)^2 + (x_0 + 1)^2}} = 1$

所以 $(1 - x_0^2)m^2 - 2y_0(1 + x_0)m + (x_0 + 1)^2 = 0$ 6 分

同理直线 PN 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切得: $(1 - x_0^2)n^2 - 2y_0(1 + x_0)n + (x_0 + 1)^2 = 0$.

构造方程: $(1 - x_0^2)t^2 - 2y_0(1 + x_0)t + (x_0 + 1)^2 = 0$, 则 $t_1 = m$, $t_2 = n$.

$$\begin{cases} (1 - x_0^2) \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ m + n = \frac{2y_0(1 + x_0)}{1 - x_0^2} = \frac{2y_0}{1 - x_0} \\ m \cdot n = \frac{(x_0 + 1)^2}{1 - x_0^2} = \frac{1 + x_0}{1 - x_0} < 0 \end{cases}$$
8 分

高三理科数学 (一诊) 参考答案第 4 页 (共 6 页)

显然 $x_0 > 1$

$$S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} |m-n| |x_0+1| = \frac{1}{2} |x_0+1| \sqrt{(m+n)^2 - 4mn} = |x_0+1| \frac{\sqrt{(2x_0)^2 - 4(1-x_0)(1+x_0)}}{|x_0-1|} = |x_0+1| \frac{\sqrt{x_0^2 + 4x_0 - 1}}{|x_0-1|}$$

.....10 分

令 $\mu = x_0 - 1$, 则 $x_0 = \mu + 1$, $\mu > 0$

$$S_{\triangle PMN} = \sqrt{\frac{(\mu+2)^2}{\mu} \cdot \frac{(\mu^2+6\mu+4)}{\mu}} = \sqrt{(\mu+\frac{4}{\mu}+4) \cdot (\mu+\frac{4}{\mu}+6)} \geq \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

当且仅当 $\mu = \frac{4}{\mu} = 2$ 时, 即 $x_0 = 3$, 取最小值.

所以 $S_{\triangle PMN}$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$ 12 分

22. 解: (1) 因为曲线 C 满足参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos\alpha \\ y=2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数, $\alpha \in [-\pi, 0]$)

所以曲线 C 的直角坐标方程为: $x^2 + y^2 = 4$ ($y \leq 0$)3 分

因为直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta - m = 0$. 由 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$

得直线 l 直角坐标方程为 $x + y - m = 0$ 5 分

(2) 方法一: 因为直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$

$$\text{所以 } \cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

记 O 到 l 的距离为 d. 则

$$d = \frac{|m|}{\sqrt{2}} = 2 \sin \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

又 $m < 0$.

所以 $m = -\sqrt{6}$ 10 分

方法二: 已知 $O(0,0)$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

$$\text{则 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + (m - x_1) \cdot (m - x_2) = 2x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2 = 2 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y - m = 0 \end{cases}$$

得 $2x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$ 7 分

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = m < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2 - 4}{2} \end{cases}$$

所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (m^2 - 4) - m^2 + m^2 = 2$ 8 分

所以 $m = -\sqrt{6}$ 或 $m = \sqrt{6}$ (舍去) 9 分

综上: $m = -\sqrt{6}$ 10 分

23. 解: (1) $f(x) = |x-1| - |x+2| < 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -3 < 2x \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} -2 < x < 1 \\ -1-2x < 2x \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x \leq -2 \\ 3 < 2x \end{cases} \text{ 3 分}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{4}, +\infty) \text{ 5 分}$$

$$(2) \quad f(x) = |x-1| - |x+2| = \begin{cases} -3 & x \geq 1 \\ -1-2x & -2 < x < 1 \\ 3 & x \leq -2 \end{cases} \text{ 6 分}$$

所以函数 $f(x)$ 的最大值为 $M = 3$.

已知正实数 a, b, c 满足 $a+b+4c = \frac{1}{3}M - 1$ 8 分

由柯西不等式得

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right] \cdot [(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (2\sqrt{c})^2] \geq \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot 2\sqrt{c}\right)^2 = 16$$

..... 9 分

当且仅当 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{1}} = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{1}}$ 时, 即 $a=b=2c$ 时, 又 $a+b+4c=1$.

所以当且仅当 $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{8}$ 时, 等号成立 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线