达州市普通高中 2023 届第二次诊断性测试

理科数学参考答案

一、选择题：

1. B　2. B　3.D　4.D　5.C　6.C　7.C　8. A　9.C　10.A　11.B　12. D

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -12　　14. 2π　　15. 1　　16. ①②③

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．解：(1) 由表知 K^2 观测值 $k=\dfrac{150(45\times25-75\times5)^2}{120\times30\times50\times100}=\dfrac{75}{16}\approx4.688<6.635$.

∴没有 99% 的把握认为经过职业培训后，合作社职工年收入超过 10 万元与性别有关.

(2) 由题意，设某职工获奖概率为 p，$p=C_3^2\times0.8^2(1-0.8)+0.8^3\approx0.9$.

所以某职工获奖的概率为 0.9.

18．(1)证明：∵ $PA=PD$，O 是 AD 的中点，∴ $PO\perp AD$.

∵平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PO\subset$ 平面 PAD，

∴ $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

∵ $BD\subset$ 平面 $ABCD$，∴ $PO\perp BD$.

设 $AB=a$，则 $AD=2a$．$\angle BAD=60^\circ$，在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle BAD=3a^2$，

∴ $AB^2+BD^2=AD^2$，∴ $AB\perp BD$.

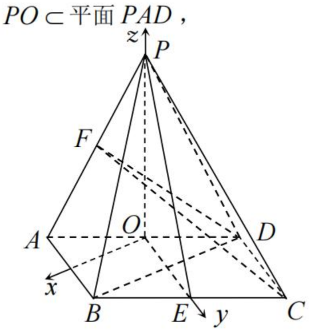
∵ E 是 BC 中点，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OE\parallel AB$，∴ $BD\perp OE$.

∵ PO，OE 是平面 POE 内两相交直线，

∴ $BD\perp$ 平面 POE.

∵ $BD\subset$ 平面 PBD，∴平面 $PBD\perp$ 平面 POE.



(2)解：由(1)知 $PO\perp OE$.

以过点 O 平行于 BD 的直线为 x 轴，分别以直线 OE，OP 为 y 轴和 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.

∵ $|AB|=2$，$|PA|=2\sqrt{5}$，∴ $A(\sqrt{3},\ -1,\ 0)$，$D(-\sqrt{3},1,0)$，$C(-\sqrt{3},3,0)$，$P(0,0,4)$，

∵ F 是 PA 中点，∴ $F(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2},2)$.

∴ $\overrightarrow{DF}=(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2},2)$，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$.

设平面 CDF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,\ y,\ z)$，

∴ $\begin{cases}\overrightarrow{DF}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{3}{2}y+2z=0,\\ 2y=0.\end{cases}$ 不妨取 $x=2$，得 $\boldsymbol{m}=(4,\ 0,\ -3\sqrt{3})$.

根据条件 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$ 是平面 POE 一个法向量.

∵ $\cos<\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{1\times\sqrt{43}}=\dfrac{4\sqrt{43}}{43}$，

所以平面 POE 与平面 CDF 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{4\sqrt{43}}{43}$.

19．(1)证：∵ $\dfrac{b}{\cos B}+\dfrac{c}{\cos C}=\dfrac{a}{\cos A}+\dfrac{3a}{\cos B\cos C}$，

$\therefore (b\cos C+c\cos B)\cos A=a(\cos B\cos C+3\cos A)$.
由正弦定理得 $(\sin B\cos C+\cos B\sin C)\cos A=\sin A(\cos B\cos C+3\cos A)$.
$\therefore \sin(B+C)\cos A=\sin A(\cos B\cos C+3\cos A)$.
$\because A+B+C=\pi$，$\therefore \sin(B+C)=\sin A$， $\cos A=-\cos(B+C)=\sin B\sin C-\cos B\cos C$ ，
$\therefore 2\sin B\sin C=\cos B\cos C$， 即 $\tan B\tan C=\dfrac{1}{2}$，

(2)解：由(1)得 $\tan B\tan C=\dfrac{1}{2}$， $\tan B>0$， $\tan C>0$.

$\therefore \tan A=-\tan(B+C)=\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}=-2(\tan B+\tan C)\leqslant -4\sqrt{\tan B\tan C}=-2\sqrt{2}$，等号

在 $\tan B=\tan C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时成立. 且 A 为钝角.

$\therefore \sin A\geqslant \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$， 等号在 $\tan B=\tan C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时成立.

$\because bc=3$， $\therefore S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ 的最小值是 $\sqrt{2}$.

20．解：(1)设椭圆 C 的焦距为 $2c$， 则 $c^2=a^2+b^2$.

$\because A$ 到 l 的最大距离为 4， $|DE|=\dfrac{16}{3}$，

$$\therefore \begin{cases} a+c=4, \\ \dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{16}{3}. \end{cases}$$

解得 $a=3$， $b=2\sqrt{2}$.

所以 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$.

(2)①解：分别设 D， E 的坐标为 (x_1, y_1)， (x_2, y_2) . 因为直线 l 过定点 $F(1, 0)$，所以当 $k_1=0$ 时， $k_2=0$；当 $k_2=0$ 时， $k_1=0$， 都与 $k_1+k_2=1$ 矛盾，因此 $y_1y_2\neq 0$， $x_1\neq \pm 3$， $x_2\neq \pm 3$.

设直线 l 的方程为 $x=ty+1$，将 $x=ty+1$ 代入 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$，化简得

$(8t^2+9)y^2+16ty-64=0$.

$\therefore y_1+y_2=-\dfrac{16t}{8t^2+9}$， $y_1y_2=-\dfrac{64}{8t^2+9}$.

$\therefore ty_1y_2=4y_1+4y_2$.

由(1)得 $A(-3, 0)$， $B(3, 0)$， $\therefore \dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{\frac{y_1}{x_1+3}}{\frac{y_2}{x_2-3}}=\dfrac{y_1(ty_2-2)}{y_2(ty_1+4)}=\dfrac{ty_1y_2-2y_1}{ty_1y_2+4y_2}=\dfrac{2y_1+4y_2}{4y_1+8y_2}=\dfrac{1}{2}$.

②$\because k_1+k_2=1$， $\therefore k_1=\dfrac{1}{3}$， $k_2=\dfrac{2}{3}$.

$\therefore$ 直线 AD 与直线 BE 的方程分别为 $y=\dfrac{1}{3}(x+3)$， $y=\dfrac{2}{3}(x-3)$.

分别由方程组$\begin{cases} y=\frac{1}{3}(x+3), \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1 \end{cases}$和$\begin{cases} y=\frac{2}{3}(x-3), \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1 \end{cases}$解得$D(\frac{7}{3},\ \frac{16}{9})$，$E(-1,\ -\frac{8}{3})$．

$\therefore \frac{|FD|}{|FE|}=\frac{\frac{16}{9}}{\frac{8}{3}}=\frac{2}{3}$.

所以$|FD|=k_2|FE|$．

21．(1) 解$\because m=2$，$\therefore f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{n}{x}$．

$\therefore x>0$，且$f'(x)=\frac{1}{x}+x-2+\frac{n}{x^2}$，即$f'(x)=\frac{x^3-2x^2+x+n}{x^2}$．

设$g(x)=x^3-2x^2+x+n(x\geqslant 0)$，则$g'(x)=3x^2-4x+1$，即$g'(x)=(3x-1)(x-1)$．不等式$g'(x)>0$的解集为$(0,\ \frac{1}{3})\cup(1,\ +\infty)$，$g'(x)<0$的解集为$(\frac{1}{3},\ 1)$．所以$g(x)$在区间$(0,\ \frac{1}{3})$上单调递增，在区间$(\frac{1}{3},\ 1)$上单调递减，在区间$(1,\ +\infty)$上单调递增．

$\because g(0)=g(1)=n$，$\therefore g(x)_{\min}=n$．

$\because f(x)$为单调增函数，$\therefore f'(x)\geqslant 0$恒成立，即$n\geqslant 0$

(2)解：由$f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-mx-\frac{n}{x}=0$得$m=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}x-\frac{n}{x^2}$．

设$h(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}x-\frac{n}{x^2}$，则$x>0$，$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{1}{2}+\frac{2n}{x^3}$，即$h'(x)=\frac{x(1-\ln x+\frac{1}{2}x^2)+2n}{x^3}$．

令$k(x)=1-\ln x+\frac{1}{2}x^2$，则$x>0$，$k'(x)=-\frac{1}{x}+x=\frac{(x+1)(x-1)}{x}$．当$0<x<1$时，$k'(x)<0$，$k(x)$单调递减；当$x>1$时，$k'(x)>0$，$k(x)$单调递增．$\because k'(1)=0$，$\therefore k(x)_{\min}=k(1)=\frac{3}{2}>0$，

$\therefore k(x)>0$．

$\because x>0$，$n>0$，$\therefore h'(x)>0$，$\therefore h(x)$在区间$(0,\ +\infty)$单调递增．

设$\varphi(x)=x-1-\ln x$，则$\varphi'(x)=1-\frac{1}{x}$，当$0<x<1$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减，$\varphi(x)>\varphi(1)=0$，即$\ln x<x-1$，$\therefore h(x)<\frac{x-1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{n}{x}=\frac{3}{2}-\frac{n+1}{x}$．$\forall t<0$，当$0<x<\min\{1,\ \frac{2n+2}{3-2t}\}$时，$h(x)<t$．【注：这一段可用$\because x\to 0$时，$h(x)\to -\infty$替代】.

当$x>1$时，$h(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}x-\frac{n}{x^2}>\frac{1}{2}x-n$，$\forall t>0$，当$x>2(t+n)$时，$h(x)>t$．【注：这一段可用$x\to +\infty$时，$h(x)\to +\infty$替代】.

$\therefore$对任意实数m，方程$h(x)=m$只有一个解，即$f(x)$的零点个数是1．

22．解：(1)由曲线C的参数方程$\begin{cases} x=\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha, \\ y=\sin\alpha-\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$（$\alpha$为参数）得

$\sin\alpha=\frac{x+y}{2}$，$\cos\alpha=\frac{x-y}{2\sqrt{2}}$．

$\therefore (\dfrac{x+y}{2})^2+(\dfrac{x-y}{2\sqrt{2}})^2=1$，化简得$C$的直角坐标方程为$3x^2+3y^2+2xy-8=0$．

分别将$x^2+y^2=\rho^2$，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$代入C的直角坐标方程并化简得C的极坐标方程为$\rho^2=\dfrac{8}{3+\sin 2\theta}$（或$\rho^2(3+\sin 2\theta)-8=0$）．

(2)设点A，B极坐标分别为$(\rho_1,\ \beta)$，$(\rho_2,\ \beta)$，则$|AB|=|\rho_1-\rho_2|$．

由$\rho^2=\dfrac{8}{3+\sin 2\beta}$知，当$2\beta=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即$\beta=k\pi-\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$时，$\rho^2$取得最大值$4$．根据题意，不妨取$\rho_1=2$，$\rho_2=-2$，所以$|AB|$的最大值为$4$．

23．(1)解：由$f(x)=|\dfrac{1}{2}x-1|$，$g(x)=|x-m|+m$得

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x+1, & x<2,\\ \dfrac{1}{2}x-1, & x\geqslant 2\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}-x+2m, & x<m,\\ x, & x\geqslant m.\end{cases}$$

由$-\dfrac{1}{2}x+1=x$得$x=\dfrac{2}{3}$.

当$m<\dfrac{2}{3}$时，$f(m)=-\dfrac{1}{2}m+1>\dfrac{2}{3}>m=g(m)$，不合题意.

当$m\geqslant\dfrac{2}{3}$时，若$x<2$，则$f(m)=-\dfrac{1}{2}m+1\leqslant\dfrac{2}{3}\leqslant m=g(m)=g(x)_{\min}$，若$x\geqslant 2$，$f(m)=\dfrac{1}{2}m-1<m=g(m)=g(x)_{\min}$. 由于射线$y=g(x)(x<m)$的斜率$-1$，小于射线$y=f(x)(x<2)$的斜率$-\dfrac{1}{2}$，射线$y=g(x)(x\geqslant m)$的斜率$1$，大于射线$y=f(x)(x\geqslant 2)$的斜率$\dfrac{1}{2}$，所以$f(x)\leqslant g(x)$恒成立.

所以实数m的取值范围是$[\dfrac{2}{3},\ +\infty)$.

(2)证明：由(1)知m的最小值为$\dfrac{2}{3}$，

$\therefore f(x)+g(x)=|\dfrac{1}{2}x-1|+|x-\dfrac{2}{3}|+\dfrac{2}{3}\geqslant|-\dfrac{1}{2}x+1+x-\dfrac{2}{3}|+\dfrac{2}{3}=|\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}|+\dfrac{2}{3}\geqslant\dfrac{1}{2}x+1$．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。