九师联盟

2020～2021学年高三11月质量检测

文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：集合、常用逻辑用语、函数、导数、三角函数、三角恒等变换、解三角形、平面向量、数列、不等式、立体几何。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若命题 p：$\exists x_0\in(-\infty,1]$，$x_0^2<0$，则 $\neg p$ 为

A. $\forall x\notin(-\infty,1]$，$x^2\geqslant0$　　B. $\exists x_0\notin(-\infty,1]$，$x_0^2\geqslant0$

C. $\forall x\in(-\infty,1]$，$x^2\geqslant0$　　D. $\exists x_0\in(-\infty,1]$，$x_0^2>0$

2. 已知全集为 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|0<x<1\}$，$B=\{x|x>2\}$，则

A. $A\subseteq B$　　B. $B\subseteq A$

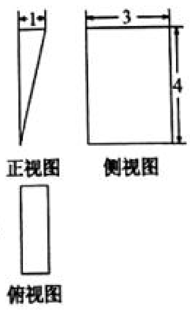
C. $A\cup B=\mathbf{R}$　　D. $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=A$

3. 在流行病学中，基本传染数 R_0 是指在没有外力介入，同时所有人都没有免疫力的情况下，一个感染者平均传染的人数. 初始感染者传染 R_0 个人，为第一轮传染，这 R_0 个人中每人再传染 R_0 个人，为第二轮传染，…… R_0 一般由疾病的感染周期、感染者与其他人的接触频率、每次接触过程中传染的概率决定. 假设新冠肺炎的基本传染数 $R_0=3.8$，平均感染周期为7天，设某一轮新增加的感染人数为 M，则当 $M>1\ 000$ 时需要的天数至少为

A. 34　　B. 35　　C. 36　　D. 37

参考数据：$\lg 38\approx1.58$

4. 在中国古建筑中，为了保持木构件之间接榫（"榫"，即指木制构件利用凹凸方式相连接的部分）的地方不活动，需要将楔子捶打到榫子缝里. 如图是一个楔子的三视图，则这个楔子的体积是



A. 6　　B. 8

C. 12　　D. 16

5. 在长方形 $ABCD$ 中，$AB=2AD$，过 AD，BC 分别作异于平面 $ABCD$ 的平面 α，β，若 $\alpha\cap\beta=l$，则 l 与 BD 所成角的正切值是

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 4

6. 已知正数 x,y 满足 $x(y-1)=2$，则 $2x+y$ 的最小值为

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 8

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=xe^x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为

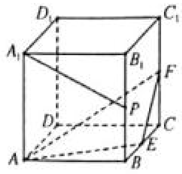
A. $y=2ex-e$　　B. $y=-2ex-e$

C. $y=2ex+e$　　D. $y=-2ex+e$

8. 将曲线 $y=\sin x$ 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再将得到的曲线向左平移 $\frac{11\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 $y=f(x)$，则 $f(0)\cdot f(\pi)=$

A. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{1}{4}$

9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F,P 分别是棱 BC,CC_1,BB_1 的中点，点 A_1，P 到平面 AEF 的距离分别为 h_1,h_2，则



A. $h_1=\frac{\sqrt{2}}{2}h_2$　　B. $h_1=\frac{\sqrt{3}}{2}h_2$

C. $h_1=h_2$　　D. $h_1=2h_2$

10. 在一次气象调查中，发现某城市的温度 y（单位：℃）的波动近似地遵循规律 $y=25+6\sin\frac{\pi}{12}t$，其中 t（单位：h）是从某日 9:00 开始计算（即 9:00 时，$t=0$），且 $t\leqslant 24$. 现给出下列结论：

①15:00 时，出现最高温度，且最高温度为 31 ℃；

②凌晨 3:00 时，出现最低温度，且最低温度为 19 ℃；

③温度为 28 ℃时的时刻为 11:00；

④温度为 22 ℃时的时刻为凌晨 7:00.

其中正确的所有序号是

A. ①　　B. ①②　　C. ①②③　　D. ①②③④

11. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$（侧棱 $AA_1\perp$ 底面 $A_1B_1C_1$，底面 $\triangle A_1B_1C_1$ 是正三角形）内接于球 O，AB_1 与底面 $A_1B_1C_1$ 所成的角是 45°. 若正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积是 $2\sqrt{3}$ cm^3，则球 O 的表面积是

A. $\frac{28\pi}{3}$ cm^2　　B. $\frac{56\pi}{3}$ cm^2　　C. $\frac{7\pi}{3}$ cm^2　　D. $\frac{14\pi}{3}$ cm^2

12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 满足 $f(10-x)=f(x)$，$(x-5)f'(x)>0(x\neq 5)$，若 $f(-1)f(1)<0$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(9,11)$ 内

A. 没有零点　　B. 可能有无数个零点

C. 至少有 2 个零点　　D. 有且仅有 1 个零点

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\ x+y-1\geqslant 0,\\ x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $x+y$ 的最大值为________.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，$\angle ABC=45^\circ$，AD 是边 BC 上的高，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

15. 已知函数 $f(x)=e^{b-x}-e^{x-b}+c$（b,c 均为常数）的图象关于点 $(2,1)$ 对称，则 $b+c$ 的值是________.

16. 我国古代数学著作《九章算术》有如下问题："今有金箠，长五尺，斩本一尺，重四斤，斩末一尺，重二斤，问次一尺各重几何？"意思是："现有一根金杖，长 5 尺，一头粗，一头细，在粗的一端截下 1 尺，重 4 斤；在细的一端截下 1 尺，重 2 斤；问依次每一尺各重多少斤？"设该金杖由粗到细是均匀变化的，现将该金杖截成长度相等的 15 段，记第 n 段的重量为 a_n 斤 $(n=1,2,\cdots,15)$，且 $a_1<a_2<\cdots<a_{15}$，若 $b_n=[a_n]\cdot a_n$（其中 $[a_n]$ 表示不超过 a_n 的最大整数），则数列 $\{b_n\}$ 的所有项和为________

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,\pi]$，向量 $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},-1)$.

(1)若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求 θ 的值；

(2)若 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

在锐角△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，且 $bc=16$，△ABC 的面积为 $4\sqrt{3}$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若△ABC 的外接圆半径为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$，求△ABC 的周长.

19.（本小题满分 12 分）

已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，其前 n 项和为 S_n，且 $S_3=-3$，$S_6=-\frac{21}{8}$.

(1)求 q；

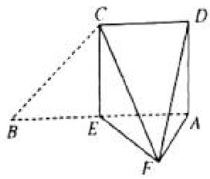
(2)设 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项，q 为公差的等差数列，其前 n 项和为 T_n，当 $n\geq 2$ 时，试比较 T_n 与 b_n 的大小.

20.（本小题满分12分）

如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB // CD$，$AD \perp AB$，$AB=2AD=2CD=4$，E 为 AB 的中点. 沿 CE 将 $\triangle BCE$ 折起，使点 B 到达点 F 的位置，且 $\angle AEF=60^\circ$.

(1) 证明：平面 $CEF \perp$ 平面 AEF；

(2) 求四棱锥 $F-ADCE$ 的体积.



21.（本小题满分12分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n，且 $S_n=2a_n-1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n=\dfrac{n}{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22.（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=e^x-ae^2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $a<0$ 时，证明：$f(x)>e^2\ln x$.

2020～2021学年高三11月质量检测·文科数学

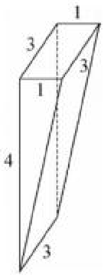
参考答案、提示及评分细则

1. C　特称命题的否定为全称命题,做法是改量词,否结论. 故选C.

2. D　$A=\{x|0<x<1\}$,$B=\{x|x>2\}$,则$\complement_R B=\{x|x\leqslant 2\}$,所以$A\cap(\complement_R B)=A$. 故选D.

3. D　设第n轮感染人数为a_n,则数列$\{a_n\}$为等比数列,其中$a_1=3.8$,公比为$R_0=3.8$,所以$a_n=3.8^n>1\ 000$,解得$n>\log_{3.8}1\ 000=\frac{3}{\lg 3.8}=\frac{3}{\lg 38-1}\approx\frac{3}{0.58}\approx 5.17$,而每轮感染周期为7天,所以需要的天数至少为$5.17\times 7=36.19$. 故选D.

4. A　该楔子是一个底面为直角三角形(两直角边长分别为4和1),高为3的直三棱柱,其直观图如图所示,则$V=\left(\frac{1}{2}\times 4\times 1\right)\times 3=6$. 故选A.



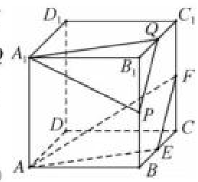
5. C　由$AD/\!/BC$及线面平行的判定定理,得$AD/\!/\beta$,再由线面平行的性质定理,得$AD/\!/l$,所以l与BD所成角是$\angle ADB$,从而$\tan\angle ADB=2$. 故选C.

6. B　由题意,得$x>0,y>1$. 法一:$2x+y=2x+(y-1)+1\geqslant 2\sqrt{2x(y-1)}+1=5$,当且仅当$2x=y-1$,即$x=1,y=3$时,$2x+y$的最小值为5. 故选B. 法二:由$x(y-1)=2$,得$x=\frac{2}{y-1}$,则$2x+y=\frac{4}{y-1}+(y-1)+1\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{y-1}\cdot(y-1)}+1=5$,当且仅当$2x=y-1$,即$x=1,y=3$时,$2x+y$的最小值为5. 故选B.

7. B　法一:当$x\geqslant 0$时,$f'(x)=(x+1)e^x$,则$f'(1)=2e$,$f(1)=e$,所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-e=2e(x-1)$,即$y=2ex-e$,根据对称性,可得曲线$y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的切线方程为$y=-2ex-e$. 故选B.
法二:当$x<0$时,$-x>0$,所以$f(-x)=-xe^{-x}$,又$f(x)$是偶函数,所以$f(x)=-xe^{-x}=-\frac{x}{e^x}$,所以$f'(x)=\frac{x-1}{e^x}$,所以$f'(-1)=-2e$,又$f(-1)=e$,所以曲线$y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的切线方程为$y-e=-2e(x+1)$,即$y=-2ex-e$. 故选B.

8. D　由题意,得$f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{11\pi}{12}\right)$,则$f(0)\cdot f(\pi)=\sin\left(\frac{1}{2}\times 0+\frac{11\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\times\pi+\frac{11\pi}{12}\right)=\sin\frac{11\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{11\pi}{6}=-\frac{1}{4}$. 故选D.

9. C　如图,取B_1C_1的中点Q,连接A_1Q,PQ,易证$PQ/\!/EF$. 又因为$EF\subset$平面AEF,$PQ\not\subset$平面AEF,所以$PQ/\!/$平面AEF,同理可证$A_1Q/\!/$平面AEF. 因为$A_1Q,PQ\subset$平面A_1PQ,且$A_1Q\cap PQ=Q$,所以平面$A_1PQ/\!/$平面AEF,又$A_1P\subset$平面A_1PQ,所以$A_1P/\!/$平面AEF,所以$h_1=h_2$. 故选C.

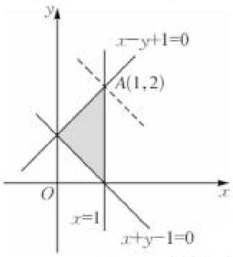


10. B　当$\frac{\pi}{12}t=\frac{\pi}{2}$,即$t=6$,即15:00时,$y_{\max}=31(℃)$,则①正确;当$\frac{\pi}{12}t=\frac{3\pi}{2}$,即$t=18$,即凌晨3:00时,$y_{\min}=19(℃)$,则②正确;由$25+6\sin\frac{\pi}{12}t=28$,得$\sin\frac{\pi}{12}t=\frac{1}{2}$,则$\frac{\pi}{12}t=\frac{\pi}{6}$或$\frac{\pi}{12}t=\frac{5\pi}{6}$,解得$t=2$或$t=10$,即对应的时刻为11:00和19:00,则③错误;同理④也错误. 故选B.

11. A　易知$\angle AB_1A_1$是AB_1与底面$A_1B_1C_1$所成的角,则$\angle AB_1A_1=45°$. 故由$\tan\angle AB_1A_1=\tan 45°=\frac{AA_1}{A_1B_1}=1$,得$AA_1=A_1B_1$. 设$AA_1=A_1B_1=a$,则$V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}a}{2}\times a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^3=2\sqrt{3}$,解得$a=2$. 所以球$O$的半径$R=\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left(2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{3}}$,所以球$O$的表面积$S=4\pi R^2=4\pi\times\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2=\frac{28\pi}{3}\ cm^2$. 故选A.

12. D　因为函数$y=f(x)$满足$f(10-x)=f(x)$,所以函数$f(x)$的对称轴为直线$x=5$. 又因为$(x-5)f'(x)>0$,所以当$x<5$时,$f'(x)<0$;当$x>5$时,$f'(x)>0$,所以函数$f(x)$在$(-\infty,5)$上单调递减,在$(5,+\infty)$上单调递增. 又$f(-1)f(1)<0$,且由对称性得,$f(-1)=f(11)$,$f(1)=f(9)$,则$f(9)f(11)<0$. 又函数$f(x)$在区间$(9,11)$上单调递增,所以函数$f(x)$在区间$(9,11)$内有且仅有1个零点. 故选D.

13.3　画出可行域,设 $z=x+y$,则 $y=-x+z$,当直线 $y=-x+z$ 过点(1,2)时,z 最大,且 $z_{max}=3$.



14.8　法一:过 D 作 $DH\perp AC$ 于点 H,根据数量积的几何意义,得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=AH\cdot AC$,根据射影定理,得 $AD^2=AH\cdot AC$;在直角三角形 ABD 中,$AD=2\sqrt{2}$,所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=AH\cdot AC=AD^2=8$. 法二:由 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}|\cos 45°=2\sqrt{2}$,得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle DAC=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AD}|^2=8$.

15.3　将 $y=f(x)$的图象向左平移 2 个单位,再向下平移 1 个单位,可得 $g(x)=e^{b-(x+2)}-e^{(x+2)-b}+c-1$ 的图象,且其图象关于原点对称,所以 $g(x)=e^{b-(x+2)}-e^{(x+2)-b}+c-1$ 必为奇函数,从而 $b=2,c=1$,此时 $g(x)=e^{-x}-e^{x}$,故 $b+c=2+1=3$.

16.$\frac{86}{9}$　由题意,由细到粗每段的重量成等差数列$\{a_n\}$,设公差为 d,则$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=2,\\ a_{13}+a_{14}+a_{15}=4,\end{cases}$解得 $a_1=\frac{11}{18},d=\frac{1}{18}$,所以$a_n=\frac{n+10}{18}$. 所以$[a_n]=\begin{cases}0,1\leqslant n\leqslant 7,\\ 1,8\leqslant n\leqslant 15.\end{cases}$因此数列$\{b_n\}$的所有项和为 $a_8+a_9+\cdots+a_{15}=\frac{18+19+\cdots+25}{18}=\frac{86}{9}$.

17.解:(1)由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,得$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=0$,

解得 $\tan\theta=\sqrt{3}$. ……………………………………………… 2 分

又 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………… 4 分

(2)因为 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2\cos\theta-\sqrt{3},2\sin\theta+1)$, ……………………………………… 6 分

所以 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\cos\theta-\sqrt{3})^2+(2\sin\theta+1)^2}$

$=\sqrt{8+4\sin\theta-4\sqrt{3}\cos\theta}=\sqrt{8+8\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}$. ……………………………… 8 分

由 $\theta\in[0,\pi]$,得 $\theta-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$.

所以当 $\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$时,即 $\theta=\frac{5\pi}{6}$时,$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|_{max}=4$. ……………………………… 9 分

由 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<m$ 恒成立,得 $m>4$,

所以实数 m 的取值范围$(4,+\infty)$. ……………………………………………… 10 分

18.解:(1)由$\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$,得$\frac{1}{2}bc\sin A=4\sqrt{3}$, ……………………………… 2 分

结合 $bc=16$,解得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ……………………………………………… 4 分

因为$\triangle ABC$ 为锐角三角形,所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………… 6 分

(2)设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,由正弦定理,得 $a=2R\sin A=2\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4$. ……………… 8 分

由余弦定理,得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即 $a^2=(b+c)^2-3bc$, ……………………………… 10 分

将 $bc=16$ 及 $a=4$ 代入上式,解得 $b+c=8$,

所以$\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=12$. ……………………………………………… 12 分

19.解:(1)当 $q=1$ 时,若 $S_3=-3$,则应有 $S_6=-6$,这与 $S_6=-\frac{21}{8}$矛盾,故 $q\neq 1$. ………………… 1 分

由 $S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=-\frac{21}{8}$,$S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=-3$ 相除, ……………………………… 5 分

得 $1+q^3=\frac{7}{8}$，解得 $q=-\frac{1}{2}$. ······ 6 分

(2)由题意知 $b_n=2-\frac{1}{2}(n-1)=\frac{5-n}{2}$，

$T_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9n-n^2}{4}$， ······ 8 分

当 $n\geqslant2$ 时，$T_n-b_n=\frac{9n-n^2}{4}-\frac{5-n}{2}=-\frac{(n-1)(n-10)}{4}$. ······ 10 分

所以当 $2\leqslant n\leqslant9$ 时，$T_n>b_n$；

当 $n=10$ 时，$T_n=b_n$；

当 $n\geqslant11$ 时，$T_n<b_n$. ······ 12 分

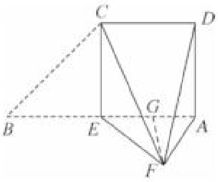
20. (1)证明：在直角梯形 $ABCD$ 中，由平面几何的知识，得四边形 $ADCE$ 为正方形，

则 $CE\perp EF$，$CE\perp AE$. ······ 2 分

又 $EF\cap AE=E$，所以 $CE\perp$ 平面 AEF. ······ 4 分

又 $CE\subset$ 平面 CEF，所以平面 $CEF\perp$ 平面 AEF. ······ 6 分

(2)解：由 $\angle AEF=60^\circ$ 及 $AE=EF=2$，得 $\triangle AEF$ 为正三角形. ······ 7 分



由(1)，得 $CE\perp$ 平面 AEF，$CE\subset$ 平面 $ADCE$，

所以平面 $ADCE\perp$ 平面 AEF. ······ 8 分

取 AE 的中点 G，则 $FG\perp AE$，且 $FG=\sqrt{3}$，又平面 $ADCE\cap$ 平面 $AEF=AB$，$FG\subset$ 平面 AEF，

所以 $FG\perp$ 平面 $ADCE$，即 FG 的长为四棱锥 $F-ADCE$ 的高， ······ 10 分

所以四棱锥 $F-ADCE$ 的体积为 $\frac{1}{3}AD^2\times FG=\frac{1}{3}\times2^2\times\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. ······ 12 分

21. 解：(1)因为 $S_n=2a_n-1$， ①

当 $n=1$ 时，$S_1=2a_1-1$，解得 $a_1=1$； ······ 1 分

当 $n\geqslant2$ 时 $S_{n-1}=2a_{n-1}-1$， ② ······ 2 分

①－②，得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=2(n\geqslant2)$， ······ 3 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，······ 4 分

从而 $a_n=2^{n-1}$. ······ 5 分

(2)由(1)知 $b_n=\frac{n}{2^{n-1}}$， ······ 6 分

则 $T_n=\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+\frac{n}{2^{n-1}}$，

两边同乘以 $\frac{1}{2}$，得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$， ······ 9 分

两式相减得 $\frac{1}{2}T_n=1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{2}{2^n}-\frac{n}{2^n}$， ······ 11 分

所以 $T_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$. ······ 12 分

22. (1)解：$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=e^x-ae^2$. ······ 2 分

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,+\infty)$，无减区间. ······ 3 分

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=2+\ln a$.

当 $x\in(-\infty,2+\ln a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(2+\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty,2+\ln a)$，增区间 $(2+\ln a,+\infty)$. ······ 5 分

(2)证明：法一：要证明 $e^x-ae^2x>e^2\ln x$，

由于当 $a<0$ 时，$ae^2x<0$，只要证 $e^x-e^2\ln x>0$. ······ 6 分

设 $g(x)=e^x-e^2\ln x$，则 $g'(x)=e^x-\frac{e^2}{x}$，$g''(x)=e^x+\frac{e^2}{x^2}>0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数. ………………………………………………………… 7 分

又 $g'(1)=\mathrm{e}-\mathrm{e}^2<0$，$g'(2)=\mathrm{e}^2-\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}>0$，

所以存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $g'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{\mathrm{e}^2}{x_0}=0$，即 $\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{\mathrm{e}^2}{x_0}$，$\ln x_0=2-x_0$， ………………………… 8 分

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

因此 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上是减函数，在 $(x_0,+\infty)$ 上是增函数， ………………………………… 9 分

所以 $g(x)$ 有极小值，且极小值为 $g(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\mathrm{e}^2\ln x_0=\dfrac{\mathrm{e}^2}{x_0}-\mathrm{e}^2(2-$ [illegible] $-2\mathrm{e}^2>2\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}^2=0$. ……… 11 分

因此 $g(x)>0$，即 $\mathrm{e}^{x-2}-\ln x>0$.

综上，当 $a<0$ 时，$f(x)>\mathrm{e}^2\ln x$. ………………………………………………………………… 12 分

法二：要证明 $\mathrm{e}^x-a\mathrm{e}^2x>\mathrm{e}^2\ln x$，只要证 $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-a$ [illegible] ……………………………………………… 6 分

设 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-a\mathrm{e}^2(x>0)$，则 $g'(x)=$ [illegible]

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 [illegible] 0，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数，在 [illegible] $\infty)$ 上是增函数，

所以 $x=1$ 是 $g(x)$ 的极小值点，也是最小值点，且 $g(x)_{\min}=g(1)=\mathrm{e}-a\mathrm{e}^2$. ………………………… 8 分

令 $h(x)=\dfrac{\mathrm{e}^2\ln x}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^2(1-\ln x)}{x^2}$.

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$h'(x)>0$；当 $x>\mathrm{e}$ 时，$h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上是增函数，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上是减函数，

所以 $x=\mathrm{e}$ 是 $h(x)$ 的极大值点，也是最大值点，且 $h(x)_{\max}=h(\mathrm{e})=\mathrm{e}$， ………………………… 10 分

所以当 $a<0$ 时，$g(x)\geqslant\mathrm{e}-a\mathrm{e}^2>\mathrm{e}\geqslant h(x)$，即 $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-a\mathrm{e}^2>\dfrac{\mathrm{e}^2\ln x}{x}$.

综上，当 $a<0$ 时，$f(x)>\mathrm{e}^2\ln x$. ………………………………………………………………… 12 分

法三：要证明 $\mathrm{e}^x-a\mathrm{e}^2x>\mathrm{e}^2\ln x$.

由于当 $a<0$ 时，$a\mathrm{e}^2x<0$，只要证 $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2\ln x>0$. ………………………………………………… 6 分

设 $g(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2\ln x=(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2x+\mathrm{e}^2)+(\mathrm{e}^2x-\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2\ln x)$，

令 $h(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2x+\mathrm{e}^2(x>0)$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2$，

当 $0<x<2$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上是减函数，在 $(2,+\infty)$ 上是增函数，

所以 $x=2$ 是 $h(x)$ 的极小值点，也是 $h(x)$ 的最小值点，即 $h(x)_{\min}=h(2$ [illegible] ………………………… 8 分

设 $m(x)=\mathrm{e}^2x-\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2\ln x$，则 $m'(x)=\mathrm{e}^2-\dfrac{\mathrm{e}^2}{x}=\dfrac{(x-1)\mathrm{e}^2}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$m'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$m'(x)>0$，

所以 $m(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数，在 $(1,+\infty)$ 上是增函数，

所以 $x=1$ 是 $m(x)$ 的极小值点，也是 $m(x)$ 的最小值点，即 [illegible] $=m(1)=0$. ………………………… 10 分

综上，$h(x)\geqslant0$（当且仅当 $x=2$ 时取等号）[illegible] 当且仅当 $x=1$ 时取等号），

所以 $g(x)=h(x)+m(x)>0$，

故当 $a<0$ 时，$f(x)>\mathrm{e}^2\ln x$. ………………………………………………………………… 12 分

法四：设 $g(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2\ln$ [illegible] $(\mathrm{e}x-\mathrm{e}^2\ln x)$，类似法三，分别研究 $h(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x$ 和 $m(x)=\mathrm{e}x-\mathrm{e}^2\ln x$ 的最小值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》