



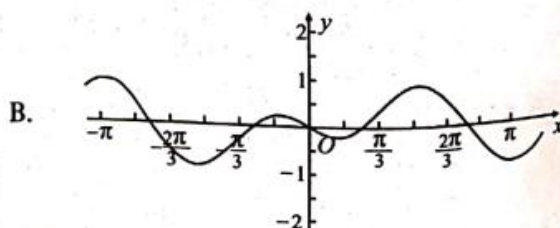
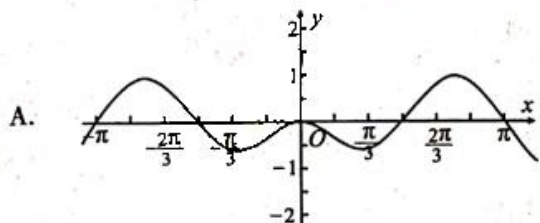
1号卷·A10联盟2021 数学(理)

巢湖一中 合肥八中 淮南二中 六安一中 南陵中学 舒城中学 太湖中学 天长
本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分

第I卷(选择题 共60分)

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

1. 设集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | x^2 - 8x < 0\}$, $B = \{x | \log_2 x > 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. (4,8) B. {1,2,3} C. {5,6,7} D. {5,6,7,8}
2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ a - \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(f(-1)) = -1$, 则 $a =$ ()
A. -2 B. -1 C. 0 D. 2
3. 若 $\tan \alpha = 3$, $\tan \beta = 2$, 则 $\tan(\alpha - 2\beta) =$ ()
A. $-\frac{13}{9}$ B. 1 C. $-\frac{9}{13}$ D. -1
4. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, 且 $a_n^2 - a_{n+1} = 4(a_n - 1)(n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_{20} =$ ()
A. 0 B. 2 C. 4 D. 74
5. 若 $m \in \mathbf{R}$, 则 " $\exists x_0 \in \mathbf{R}, m \cos x_0 + 2 < 0$ " 是 " $m < -2$ " 的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AC 上的点, E 是直线 BD 上一点, 且 $\overrightarrow{DC} = 4\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BD}$, 若 $\overrightarrow{AE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, 则 $m - n =$ ()
A. $\frac{7}{5}$ B. $-\frac{7}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$
7. 若直线 $2ax + by - 2 = 0 (a > 0, b > 0)$ 过函数 $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$ 图象的对称中心, 则 $\frac{4}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 ()
A. 4 B. 6 C. 8 D. 9
8. 函数 $f(x) = \frac{1-5^x}{1+5^x} \cdot \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)$ 的图象大致为 ()

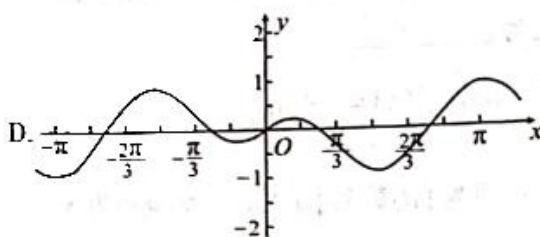
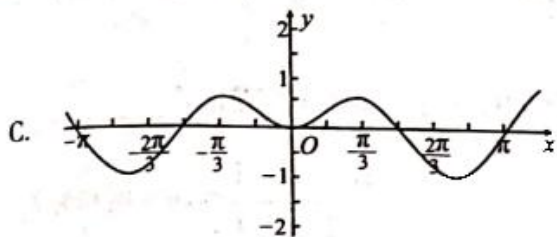


高三上学期11月段考

理科) 试题

屯溪一中 宣城中学 滁州中学 池州一中 阜阳一中 灵璧中学 宿城一中

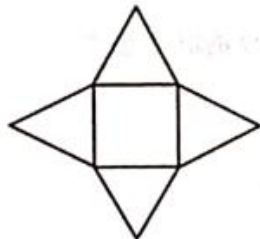
满分150分, 考试时间120分钟。请在答题卡上作答。



9. 若 $a=0.44^{0.55}$, $b=0.55^{0.44}$, $c=\log_{0.55} 0.44$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

10. 2020年新型冠状病毒肺炎蔓延全国, 作为当时主要战场的武汉, 仅用了十余天就建成了“小汤山”模式的火神山医院和雷神山医院, 再次体现了中国速度、中国方案、中国智慧. 随着国外疫情发展, 某地计划借鉴中国模式建设临时医院, 其占地是一个正方形和四个以正方形的边为底边、腰长为400 m的等腰三角形组成的图形(如图所示), 为使占地面积最大, 则等腰三角形的底角为 ()



- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{8}$

11. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象既关于点 $(-\frac{\pi}{8}, 0)$ 中心对称, 又关于直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 对称, 且函数 $g(x) = f(x) - \sqrt{2}$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上的零点不超过2个, 现有如下三个数据:

① $\omega = 3$; ② $\omega = 10$; ③ $\omega = 18$, 则其中符合条件的数据个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

12. 定义在 \mathbf{R} 上的连续函数 $f(x)$, 导函数为 $f'(x)$. 若对任意不等于 -1 的实数 x ,

$(x+1)[f(x) - f'(x)] > 0$ 恒成立, 且 $f(-1+x) = f(-1-x)e^{2x}$, 则下列各式一定成立的是 ()

- A. $f(-1) > f(0)$ B. $e^2 f(-2) < f(0)$ C. $e f(-2) < f(-1)$ D. $e^2 f(-2) > f(0)$

第II卷(非选择题 共90分)

二、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分.)

13. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x+y+2 \geq 0 \\ x-y+1 \leq 0 \\ y-1 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的最大值为_____.
14. 已知曲线 $f(x)=a(3x-2)-e^{3x}$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $2x-y+3=0$ 垂直, 则实数 a 的值为_____.
15. 已知函数 $f(x)=x+\ln \frac{1+x}{1-x}$, 若 $f(a)+f(a+1)>0$, 则实数 a 的取值范围是_____.
16. 设首项为1的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\left\{(-1)^n \cdot \frac{4a_n}{(2n-1)(2n+1)}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若 $S_{n+1} = \frac{n+2}{n} S_n$, 则使得 $a_{2020} \cdot |T_n + 1| < 1$ 成立的最小的 n 的值为_____.

三、解答题(本大题共6小题,共70分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分10分)

- 已知 $m \in \mathbf{R}$, 命题 $p: \exists x_0 \in [-1, 1]$, 使得 $2x_0 - 2 \geq m^2 - 4m$ 成立; 命题 $q: \forall x \in [-1, 1]$, 不等式 $m \leq -x$ 恒成立.
- (I) 若 p 为真命题, 求 m 的取值范围;
- (II) 若 $p \wedge q$ 为假, $p \vee q$ 为真, 求 m 的取值范围.



18. (本小题满分12分)

- 已知函数 $f(x)=4\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$, 先将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后, 再将所得图象上各点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变), 得到函数 $g(x)$ 的图象.
- (I) 当 $x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域;
- (II) 求函数 $g(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的单调递增区间.

19. (本小题满分12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a=2$, $\frac{a^2+c^2-b^2}{4a \cos A} = \frac{\tan A}{\tan B}$.

(I) 若 $\triangle ABC$ 的面积 S 满足 $S=2 \cos A$, 求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$ 的值;

(II) 若边 BC 上的中线为 AD , 求 AD 长的最小值.

20. (本小题满分12分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为2, 且 $8, 3a_2+2, \frac{5}{2}a_3$ 成等差数列.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若数列 $\{a_n\}$ 的公比大于1, 求数列 $\{(2n-1) \cdot a_n^2\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (本小题满分12分)

已知 $f(x)$ 是定义在 $[-3, 3]$ 上的奇函数, 且当 $x \in [0, 3]$ 时, $f(x) = 4^x + a \cdot 3^x$ (a 为常数).

(I) 当 $x \in [-3, 0)$ 时, 求 $f(x)$ 的解析式;

(II) 若关于 x 的方程 $f(x) = m \cdot 2^{-x} + 3^{1-x}$ 在 $[-2, -1]$ 上有解, 求实数 m 的取值范围.

22. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = (\ln x - k - 1)x$ ($k \in \mathbb{R}$).

(I) 若对于任意 $x_1, x_2 \in (0, 3]$, 且 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) - f(x_2) < \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}$ 恒成立, 求 k 的取值范围;

(II) 若对于任意 $x \in \left[\frac{1}{e}, e^2\right]$, $f(x) > 3 \ln x$ 恒成立, 求 k 的最大整数值.

1号卷·A10联盟2021届高三上学期11月段考

数学(理科)参考答案

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	A	C	B	B	D	D	A	D	B	C

1. C 由题意得, $A = \{x \in \mathbf{N} | 0 < x < 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{x | x > 4\}$,
 $\therefore A \cap B = \{5, 6, 7\}$, 故选 C.
2. A 由题意得, $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, $\therefore f(f(-1)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = a - \log_2 \frac{1}{2} = a + 1 = -1$,
 $\therefore a = -2$, 故选 A.
3. A 由题意得, $\tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = -\frac{4}{3}$, $\therefore \tan(\alpha - 2\beta) = \frac{\tan \alpha - \tan 2\beta}{1 + \tan \alpha \tan 2\beta} =$
 $\frac{\frac{13}{3}}{1 - 4} = -\frac{13}{9}$, 故选 A.
4. C $\because a_n^2 - a_{n+1} = 4(a_n - 1)$, $\therefore a_{n+1} = (a_n - 2)^2$, $\because a_1 = 2$, $\therefore a_2 = 0$, $a_3 = 4$, \therefore 当
 $n \geq 4$ 时, $a_n = 4$, 故选 C.
5. B 令 $f(x) = m \cos x + 2$; 当 $m \geq 0$ 时, $f(x) \in [2 - m, 2 + m]$, $\therefore 2 - m < 0$,
 解得 $m > 2$, 当 $m < 0$ 时, $f(x) \in [2 + m, 2 - m]$, $\therefore 2 + m < 0$, 解得 $m < -2$,
 \therefore “ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, m \cos x_0 + 2 < 0$ ” 是 “ $m < -2$ ” 的必要不充分条件, 故选 B.
6. B $\because \overrightarrow{DC} = 4\overrightarrow{AD}$, $\therefore \overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$, $\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) =$
 $-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\therefore m - n = -1 - \frac{2}{5} = -\frac{7}{5}$. 故选 B.
7. D 由题意得, 函数 $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$ 图象的对称中心为 $(1, 2)$, $\therefore 2a + 2b - 2 = 0$,
 $\therefore a + b = 1$, $\therefore \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{4}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) = 4 + 1 + \frac{a}{b} + \frac{4b}{a} = 5 + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{4b}{a}} = 9$, 当
 且仅当 $\frac{a}{b} = \frac{4b}{a}$, 即 $a = 2b = \frac{2}{3}$ 时取等号, 故选 D.
8. D 由题意得, $f(x) = -\frac{1-5^x}{1+5^x} \cdot \cos 2x$, $\therefore f(-x) = -\frac{1-5^{-x}}{1+5^{-x}} \cdot \cos(-2x) =$
 $-\frac{5^x - 1}{5^x + 1} \cdot \cos 2x = -f(x)$, 则函数 $f(x)$ 为奇函数, 排除 A, C;

又 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$, 排除 B, 故选 D.

9. A $\because 0.44^{0.55} < 0.44^{0.44} < 0.55^{0.44} < 0.55^0 = 1$, $\therefore a < b < 1$,

又 $\log_{0.55} 0.44 > \log_{0.55} 0.55 = 1$, $\therefore a < b < c$, 故选 A.

10. D 设等腰三角形的顶角为 α , 由三角形的面积公式可得 4 个等腰三角形的面积和为

$$4 \times \frac{1}{2} \times 400 \times 400 \sin \alpha = 320000 \sin \alpha. \text{ 由余弦定理可得正方形边长为}$$

$$\sqrt{400^2 + 400^2 - 2 \times 400 \times 400 \cos \alpha} = 400\sqrt{2 - 2 \cos \alpha},$$

故正方形面积为 $160000(2 - 2 \cos \alpha) = 320000(1 - \cos \alpha)$, 则所求占地面积为

$$320000(1 - \cos \alpha + \sin \alpha) = 320000 \left[\sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) + 1 \right], \therefore \text{当 } \alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

即 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 时, 占地面积最大, 此时底角为 $\frac{\pi - \frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}$, 故选 D.

11. B 由题意得,
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{8}\omega + \varphi = k_1\pi \\ \frac{\pi}{8}\omega + \varphi = \frac{\pi}{2} + k_2\pi \end{cases}, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}, \text{ 两式相加得 } \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k_1 + k_2}{2}\pi, \text{ 又}$$

$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{4}$, 代入 $\frac{\pi}{8}\omega + \varphi = \frac{\pi}{2} + k_2\pi$ 中, 得 $\omega = 8k_2 + 2 (k_2 \in \mathbf{Z})$. 当

$x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, 记 $t = \omega x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{4}\right)$, 令 $g(x) = 0$, 得 $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$t \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{4}\right)$ 至多有 2 个实数根, $\therefore \frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{4} \leq \frac{11\pi}{4}$, 解得 $0 < \omega \leq 15$, 观察

可知, $\omega = 10$ 符合条件, 故选 B.

12. C 设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则 $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$.

$\therefore (x+1)g'(x) = (x+1)e^{-x}[f'(x) - f(x)]$. 故当 $x < -1$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x > -1$ 时, $g'(x) < 0$, 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递减.

$$\because f(-1+x) = f(-1-x)e^{2x}, \therefore f(-1+x)e^{1-x} = f(-1-x)e^{x+1},$$

即 $g(-1+x) = g(-1-x)$, $\therefore g(x)$ 的图象的对称轴为 $x = -1$. 综上,

$g(-1) > g(0)$, 即 $ef(-1) > f(0)$, 则 A 项不一定成立; $g(-2) = g(0)$,

即 $e^2 f(-2) = f(0)$, 则 B, D 项一定不成立; $g(-1) > g(-2)$, 即 $ef(-1) > e^2 f(-2)$,

即 $f(-1) > ef(-2)$, 则 C 项一定成立. 故选 C.

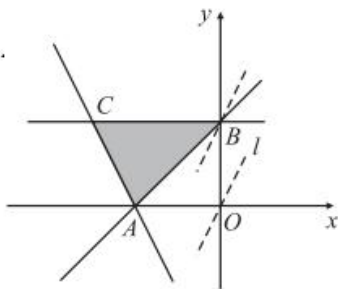
二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分.将答案填写在题中的横线上.）

13. -1

画出可行域如图所示，其中 $A(-1,0), B(0,1), C\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$.

作直线 $l: y=2x$ ，平移直线 l ，当其经过点 B 时，

$z=2x-y$ 取得最大值，最大值为 $2 \times 0 - 1 = -1$.



14. $\frac{5}{6}$

由题意得， $f'(x) = 3a - 3e^{3x}$ ，则 $f'(0) = 3a - 3$ ，则 $3a - 3 = -\frac{1}{2}$ ，解得 $a = \frac{5}{6}$.

15. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

由 $\frac{1+x}{1-x} > 0$ 解得 $-1 < x < 1$ ，且 $f(-x) = -x + \ln \frac{1-x}{1+x} = -\left(x + \ln \frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$ ，

$\therefore f(x)$ 为奇函数，且 $f(x) = x + \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \ln \frac{-(1-x)+2}{1-x} = x + \ln\left(-1 + \frac{2}{1-x}\right)$ 为

增函数. $\therefore f(a) + f(a+1) > 0$ ， $\therefore f(a+1) > -f(a) = f(-a)$ ，

$\therefore \begin{cases} a+1 > -a \\ -1 < -a < 1 \\ -1 < a+1 < 1 \end{cases}$ ，解得 $-\frac{1}{2} < a < 0$ ，即实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

16. 1010

由题意得， $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+2}{n}$ ， \therefore 当 $n \geq 2$ 时，

$S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \cdot \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \cdots \frac{S_2}{S_1} \cdot S_1 = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdots \frac{3}{1} \cdot 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ ，且当 $n=1$ 时也成立，

$\therefore S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ，易得 $a_n = n$ ， $\therefore a_{2020} = 2020$ 。

$\therefore (-1)^n \cdot \frac{4a_n}{(2n-1)(2n+1)} = (-1)^n \cdot \frac{4n}{(2n-1)(2n+1)} = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$ ，

$\therefore T_n = -1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n-1} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} = -1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$ ，

$\therefore a_{2020} \cdot |T_n + 1| < 1 \Leftrightarrow |T_n + 1| < \frac{1}{2020} \Rightarrow n > \frac{2019}{2}$ ， \therefore 使得 $a_{2020} \cdot |T_n + 1| < 1$ 成立的最小的 n 的值为 1010。

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 10 分）

（I） $\because \exists x_0 \in [-1, 1]$ ，使得 $2x_0 - 2 \geq m^2 - 4m$ 成立，

$\therefore (2x_0 - 2)_{\max} \geq m^2 - 4m$ ，即 $m^2 - 4m \leq 0$ ，

解得 $0 \leq m \leq 4$ ，即 m 的取值范围是 $[0, 4]$ 4 分

（II）若命题 q 为真，则 $m \leq (-x)_{\min}$ ， $\therefore m \leq -1$ 。

$\because p \wedge q$ 为假， $p \vee q$ 为真， $\therefore p$ 、 q 中一真一假。

当 p 真 q 假时，则 $\begin{cases} 0 \leq m \leq 4 \\ m > -1 \end{cases}$ ，解得 $0 \leq m \leq 4$ ；

当 p 假 q 真时， $\begin{cases} m < 0 \text{ 或 } m > 4 \\ m \leq -1 \end{cases}$ ，解得 $m \leq -1$ 。

综上， m 的取值范围为 $(-\infty, -1] \cup [0, 4]$ 10 分

18.（本小题满分 12 分）

（I）当 $x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ 时， $3x - \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$ ，

$\therefore \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ ， $\therefore f(x) \in [-2\sqrt{3}, 4]$ 5 分

（II）由题意得，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后，得到

$f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 4\sin\left(3x - \frac{\pi}{12}\right)$ 的图象，再将所得图象上各点的横坐标伸长到原来的

2 倍，得到 $g(x) = 4\sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{12}\right)$ 8 分

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{12} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，

解得 $-\frac{5\pi}{18} + \frac{4k\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{18} + \frac{4k\pi}{3}$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，

\therefore 函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{5\pi}{18} + \frac{4k\pi}{3}, \frac{7\pi}{18} + \frac{4k\pi}{3}\right]$ ($k \in \mathbf{Z}$). 10 分

又 $x \in [0, 2\pi]$ ，故所求单调递增区间为 $\left[0, \frac{7\pi}{18}\right]$ 和 $\left[\frac{19\pi}{18}, \frac{31\pi}{18}\right]$ 12 分

19.（本小题满分 12 分）

（I）由 $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{4a \cos A} = \frac{\tan A}{\tan B}$ 可得 $\frac{2ac \cos B}{4a \cos A} = \frac{\tan A}{\tan B}$ ， $\therefore bc = 2a = 4$ 2 分

$$\because S = \frac{1}{2}bc \sin A = 2 \sin A = 2 \cos A, \therefore \tan A = 1, \text{ 又 } A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = bc \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中, 分别由余弦定理可得 $\cos \angle ADB = \frac{AD^2 + 1 - c^2}{2AD}$,

$$\cos \angle ADC = \frac{AD^2 + 1 - b^2}{2AD}, \therefore \frac{AD^2 + 1 - c^2}{2AD} = -\frac{AD^2 + 1 - b^2}{2AD},$$

整理得 $2AD^2 + 2 = b^2 + c^2$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$\therefore 2AD^2 + 2 \geq 2bc = 8$, 即 $AD \geq \sqrt{3}$, 当且仅当 $b = c = 2$ 时, 取等号,
即 AD 长的最小值为 $\sqrt{3}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. (本小题满分 12 分)

(I) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题意得, $6a_2 + 4 = 8 + \frac{5}{2}a_3$, 即 $5q^2 - 12q + 4 = 0$,

$$\text{解得 } q = 2 \text{ 或 } q = \frac{2}{5}, \therefore a_n = 2^n \text{ 或 } a_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 由题意得, $a_n = 2^n$, $(2n-1) \cdot a_n^2 = (2n-1)4^n$,

$$\therefore T_n = 1 \times 4^1 + 3 \times 4^2 + 5 \times 4^3 + \dots + (2n-1)4^n,$$

$$\text{则 } 4T_n = 1 \times 4^2 + 3 \times 4^3 + \dots + (2n-3) \cdot 4^n + (2n-1) \cdot 4^{n+1},$$

两式相减得 $-3T_n = 4 + 2 \times (4^2 + 4^3 + \dots + 4^n) - (2n-1) \cdot 4^{n+1}$, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\therefore -3T_n = 4 + 2 \times \frac{4^2 - 4^{n+1}}{1-4} - (2n-1) \cdot 4^{n+1},$$

$$\therefore T_n = \frac{20}{9} + \frac{(6n-5)4^{n+1}}{9}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. (本小题满分 12 分)

(I) $\because f(x)$ 是定义在 $[-3, 3]$ 上的奇函数, 且当 $x \in [0, 3]$ 时, $f(x) = 4^x + a \cdot 3^x$,

$$\therefore f(0) = 4^0 + a \cdot 3^0 = 1 + a = 0, \text{ 解得 } a = -1,$$

\therefore 当 $x \in [0, 3]$ 时, $f(x) = 4^x - 3^x$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\text{当 } x \in [-3, 0) \text{ 时, } -x \in (0, 3], \therefore f(-x) = 4^{-x} - 3^{-x} = \frac{1}{4^x} - \frac{1}{3^x} = -f(x),$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x}, x \in [-3, 0). \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 由 (I) 知, 当 $x \in [-2, -1]$ 时, $f(x) = \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x}$,

$$\therefore f'(x) = m \cdot 2^{-x} + 3^{1-x} \text{ 可化为 } \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x} = m \cdot 2^{-x} + 3^{1-x},$$

整理得 $m = -\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$8分

令 $g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$, 根据指数函数的单调性可得, $g(x)$ 在 $[-2, -1]$ 是增函数.10分

$\therefore -\frac{17}{2} \leq g(x) \leq -5$, 又关于 x 的方程 $f(x) = m \cdot 2^{-x} + 3^{1-x}$ 在 $[-2, -1]$ 上有解,

故实数 m 的取值范围是 $\left[-\frac{17}{2}, -5\right]$12分

22. (本小题满分 12分)

$$(I) f(x_1) - f(x_2) < \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}, \therefore f(x_1) - \frac{2}{x_1} < f(x_2) - \frac{2}{x_2}.$$

记 $h(x) = f(x) - \frac{2}{x} = x \ln x - (k+1)x - \frac{2}{x}$, 由题意知 $h(x)$ 在 $(0, 3]$ 上单调递增.

$\therefore h'(x) = \ln x - k + \frac{2}{x^2} \geq 0$ 在 $(0, 3]$ 上恒成立,

即 $k \leq \ln x + \frac{2}{x^2}$ 在 $(0, 3]$ 上恒成立.3分

记 $u(x) = \ln x + \frac{2}{x^2}$, 则 $u'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} = \frac{x^2 - 4}{x^3}$,

$\therefore u(x)_{\min} = u(2) = \ln 2 + \frac{2}{2^2} = \ln 2 + \frac{1}{2}$,

$\therefore k \leq \ln 2 + \frac{1}{2}$, 即 k 的取值范围为 $\left(-\infty, \ln 2 + \frac{1}{2}\right]$5分

(II) 由题意得, $(\ln x - k - 1)x > 3 \ln x$ 对任意 $x \in \left[\frac{1}{e}, e^2\right]$ 恒成立,

即 $k + 1 < \frac{(x-3) \ln x}{x}$ 对于任意 $x \in \left[\frac{1}{e}, e^2\right]$ 恒成立.

令 $g(x) = \frac{(x-3) \ln x}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{3 \ln x + x - 3}{x^2}$7分

设 $p(x) = 3 \ln x + x - 3$. 易知 $p(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e^2\right]$ 上单调递增,

且 $p(2) = 3 \ln 2 - 1 > 0$, $p\left(\frac{3}{2}\right) = 3\left(\ln \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) < 0$,

$\therefore \exists x_0 \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$, 使得 $p(x_0) = 3 \ln x_0 + x_0 - 3 = 0$, 即 $\ln x_0 = \frac{3 - x_0}{3}$,9分

易知 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, x_0\right)$ 上单调递减, 在 $(x_0, e^2]$ 上单调递增,

$$\therefore g(x)_{\min} = g(x_0) = \frac{(x_0 - 3) \ln x_0}{x_0} = \frac{(x_0 - 3) \times \frac{3 - x_0}{x_0}}{x_0} = 2 - \frac{1}{3} \left(x_0 + \frac{9}{x_0} \right).$$

$$\because x_0 \in \left(\frac{3}{2}, 2 \right), \therefore -\frac{1}{2} < 2 - \frac{1}{3} \left(x_0 + \frac{9}{x_0} \right) < -\frac{1}{6},$$

又 $k \in \mathbf{Z}$, $\therefore k+1$ 的最大整数为 -1 , $\therefore k$ 的最大整数为 -212 分



关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



 微信搜一搜

 自主选拔在线