考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 点 $A(2,1,3)$ 关于 y 轴的对称点 A' 的坐标为

A. $(-2,-1,3)$　B. $(2,-1,3)$　C. $(-2,1,-3)$　D. $(2,1,-3)$

2. 抛物线 $y=\frac{1}{8}x^2$ 的焦点到准线的距离为

A. 4　B. 2　C. $\frac{1}{8}$　D. $\frac{1}{16}$

3. 直线 $m:\sqrt{3}x-3y+1=0$ 与直线 $n:x=0$ 的夹角为

A. 120°　B. 60°　C. 45°　D. 30°

4. 已知在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1\cdot a_5=9$，$a_4=6$，则 $a_5=$

A. 10　B. 12　C. 14　D. 16

5. 已知点 $A(0,3)$，$B(0,-3)$，则满足下列关系式的动点 M 的轨迹是双曲线 C 的上支的

A. $|MA|-|MB|=8$　B. $|MA|-|MB|=4$

C. $|MB|-|MA|=5$　D. $||MA|-|MB||=3$

6. 已知双曲线 C 的中心在坐标原点处，其对称轴为坐标轴，经过点 $(-\sqrt{3},2)$，且一条渐近线方程为 $2x-3y=0$，则该双曲线的方程为

A. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$　B. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$　C. $\frac{3x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1$　D. $\frac{3y^2}{8}-$

7. 已知圆 $M:(x+2)^2+(y+1)^2=16$，过点 $P(6,5)$ 作圆 M 的一条切线，切点为 N，则 的面积为

A. $4\sqrt{21}$　B. $2\sqrt{21}$　C. 8　D. 16

8. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{3}$，$\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}a_n}=2$，则$a_{10}=$

A. $\frac{1}{21}$　　B. $\frac{1}{12}$　　C. 12　　D. 21

9. 若直线l在x轴、y轴上的截距相等，且直线l将圆$x^2+y^2+2x-4y=0$的周长平分，则直线l的方程为

A. $x+y+1=0$　　B. $x+y-1=0$

C. $x+y+1=0$或$2x+y=0$　　D. $x+y-1=0$或$2x+y=0$

10. 已知菱形$ABCD$中，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，沿对角线BD折起，使二面角$A-BD-C$的平面角为θ，若异面直线AC与BD的距离是菱形边长的$\frac{3}{4}$，则$\theta=$

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

11. 已知椭圆C关于x轴、y轴均对称，焦点在y轴上，且焦距为$2c(c>0)$，若点$A\left(c,\frac{\sqrt{6}}{2}c\right)$不在椭圆$C$的外部，则椭圆$C$的离心率的取值范围为

A. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$　　B. $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　C. $\left[\frac{\sqrt{6}}{3},1\right)$　　D. $\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

12. 已知F_1,F_2分别为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，双曲线的半焦距为$c(c>0)$，且满足$b^2=ac$，点$P$为双曲线右支上一点，$I$为$\triangle PF_1F_2$的内心，若$S_{\triangle IPF_1}=S_{\triangle IPF_2}+(m-1)S_{\triangle IF_1F_2}$成立（$S$表示面积），则实数$m=$

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知圆$O_1:x^2+y^2+8x+6y+23=0$与圆$O_2:x^2+y^2-2ax+2by=0$的公共弦所在的直线与直线$x+y=0$平行，则$a+b=$________.

14. 在四棱锥$S-ABCD$中，四边形$ABCD$是平行四边形，$\overrightarrow{DO}=2\overrightarrow{OB}$，若$\overrightarrow{SO}=a\overrightarrow{SA}+b\overrightarrow{SB}+c\overrightarrow{SC}$，则$a+b+c=$________.

15. 若直线$l:y=kx+1$与双曲线$C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$的两支各交于一点，则实数k的取值范围为________.

16. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若数列$S_3,S_6-S_3,S_9-S_6,\cdots$的前$n$项和为$6n^2+3n$，则$a_{101}=$________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

(Ⅰ)证明：$\{a_n\}$是等比数列.

(Ⅱ)判断$8^{22-3m}(m\in\mathbf{N}^*)$是否可能是数列$\{a_n\}$中的项. 若是，求出$m$的最大值；若不是，请说明理由.

18. (12 分)

已知动点$M(x,y)$ 力70 到点$F(2,0)$的距离与到y轴的距离的差为 2.

(Ⅰ)求动点M的轨迹方程；

(Ⅱ)若过点F的直线l与动点M的轨迹交于A,B两点，直线$x=-2$与x轴交于点H，过A,B作直线$x=-2$的垂线，垂足分别为D,E，若$S_{\triangle DHF}:S_{\triangle EHF}=2:1$($S$表示面积)，求$|AB|$.

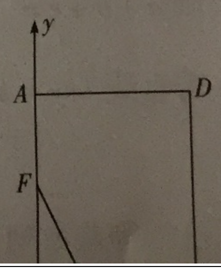
19. (12 分)

如图，四边形$ABCD$是一块长方形绿地，$AB=3$ km，$AD=2$ km，EF是一条直路，交BC于点E，交AB于点F，且$BE=AF=1$ km. 现在该绿地上建一个标志性建筑物，使建筑物的中心到D,E,F三个点的距离相等. 以点B为坐标原点，直线BC,BA分别为x,y轴建立如图所示的直角坐标系.

(Ⅰ)求出建筑物的中心的坐标；

(Ⅱ)由建筑物的中心到直路EF要开通一条路，已知路的造价为 100 万元/km，求开通的这条路的最低造价.

附：$\sqrt{5}\approx 2.24$.



20.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2a_n+n-4$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

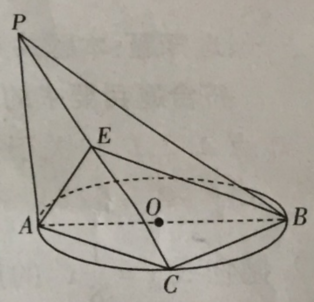
（Ⅱ）若 $n\geq 2$ 时，$c_n=2c_{n-1}+a_n-1$，$c_1=2$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

21.（12 分）

已知圆 O 的直径 $AB=2$，$PA\perp$ 圆 O 所在平面，$PA=2$，点 C 是圆周上不同于 A，B 的一点.

（Ⅰ）证明：$PC\perp CB$；

（Ⅱ）已知 $AC=BC$，点 E 是棱 PC 上一点，若 AE 与平面 PCB 所成角的余弦值为$\frac{1}{3}$，且$\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PC}$，求 λ 的值.



22.（12 分）

已知椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点分别为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过 F_1 的动直线 l_1 与过 F_2 的动直线 l_2 相互垂直，垂足为 E，若在两直线转动的过程中，点 E 仅有两次落在椭圆 M 上.

（Ⅰ）求椭圆 M 的方程；

（Ⅱ）若直线 l_1 的斜率不等于 ± 1，且直线 l_1 交椭圆 M 于 A，C 两点，直线 l_2 交椭圆 M 于 B，D 两点，证明：四边形 $ABCD$ 的面积大于$\frac{16}{9}$.

天一大联考
2022—2023 学年(上)高二年级期末考试
数学・答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案 C

命题意图 本题考查空间中点的对称点.

解析 点 $A(2,1,3)$ 关于 y 轴的对称点 A' 的坐标为 $(-2,1,-3)$.

2. 答案 A

命题意图 本题考查抛物线的性质.

解析 抛物线的方程可化为 $x^2=8y$. $\because 2p=8$, $\therefore p=4$, $\therefore$ 焦点到准线的距离为 4.

3. 答案 B

命题意图 本题考查直线的倾斜角.

解析 $\because$ 直线 m 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore$ 其倾斜角为 $30°$, 又直线 n 的倾斜角为 $90°$, $\therefore$ 两直线的夹角为 $60°$.

4. 答案 B

命题意图 本题考查等比数列的性质.

解析 由题意得 $a_1\cdot a_5=a_3^2=9$, $\therefore a_3=3$, 而 $a_4^2=a_3a_5$, $\therefore 36=3a_5$, $\therefore a_5=12$.

5. 答案 C

命题意图 本题考查双曲线的定义.

解析 选项 A 形不成图形,排除 A 项;选项 B 表示双曲线的下支,排除 B 项;选项 D 表示双曲线的上、下两支,排除 D 项. 故正确答案为 C.

6. 答案 D

命题意图 本题考查双曲线的方程的求解.

解析 可设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=\lambda$, 由题可知 $\lambda=\frac{3}{9}-\frac{4}{4}=-\frac{2}{3}$, $\therefore$ 双曲线 C 的方程为 $\frac{3y^2}{8}-\frac{x^2}{6}=1$.

7. 答案 A

命题意图 本题考查直线与圆的位置关系.

解析 由题知, $M(-2,-1)$ 且圆的半径 $r=4$, 故 $|PM|=\sqrt{(6+2)^2+(5+1)^2}=10$, 又 N 是切点, 所以 $|PN|=\sqrt{|PM|^2-r^2}=2\sqrt{21}$, 所以 $\triangle PMN$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{21}\times 4=4\sqrt{21}$.

8. 答案 A

命题意图 本题考查等差数列的定义及通项公式.

解析 由题可知 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$, 故数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{a_1}=3$, 公差为 2 的等差数列, 所以 $\frac{1}{a_n}=3+2(n-1)=2n+1$, 所以 $a_n=\frac{1}{2n+1}$, 所以 $a_{10}=\frac{1}{21}$.

9. 答案 D

命题意图 本题考查直线与圆的位置关系及直线方程的求解.

解析 由题可知圆的圆心为$(-1,2)$. 当直线l不经过原点时,设直线l的方程为$x+y=a$,$\because a=-1+2=1$,$\therefore$直线l的方程为$x+y-1=0$. 当直线l经过原点时,设直线l的方程为$y=kx$,$\because 2=-k$,$\therefore k=-2$,直线l的方程为$2x+y=0$.

10. **答案** C

命题意图 本题考查空间向量的应用.

解析 设$AB=a$,取BD的中点O,连接OA,OC,取AC的中点H,连接OH,易知OH是异面直线AC与BD的距离. 因为$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})$,所以$|\overrightarrow{OH}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2+2|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OA}|\cos\theta)=\frac{3}{8}a^2(1+\cos\theta)$,$|\overrightarrow{OH}|=\frac{\sqrt{6}}{4}a\sqrt{1+\cos\theta}$. 由题可知$\frac{\sqrt{6}}{4}\sqrt{1+\cos\theta}=\frac{3}{4}$,解得$\cos\theta=\frac{1}{2}$,$\theta=\frac{\pi}{3}$.

11. **答案** B

命题意图 本题考查椭圆的性质.

解析 由题可设椭圆C的方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$. $\because \frac{3c^2}{2a^2}+\frac{c^2}{b^2}\leqslant 1$,即$\frac{3c^2}{2a^2}+\frac{c^2}{a^2-c^2}\leqslant 1$,也即$3e^2+\frac{2e^2}{1-e^2}\leqslant 2$,化简得$(3e^2-1)(e^2-2)\geqslant 0$,解得$0<e\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore e$的取值范围是$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

12. **答案** C

命题意图 本题考查双曲线的性质.

解析 因为$b^2=ac$,所以$c^2-a^2=ac$,整理得$e^2-e-1=0$. 因为$e>1$,所以$e=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 由双曲线的定义得$|PF_1|-|PF_2|=2a$,$|F_1F_2|=2c$,设$\triangle PF_1F_2$的内切圆半径为r,则$S_{\triangle IPF_1}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot r$,$S_{\triangle IPF_2}=\frac{1}{2}|PF_2|\cdot r$,$S_{\triangle IF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 2cr=cr$. 因为$S_{\triangle IPF_1}=S_{\triangle IPF_2}+(m-1)S_{\triangle IF_1F_2}$,所以$\frac{1}{2}|PF_1|\cdot r=\frac{1}{2}|PF_2|\cdot r+(m-1)cr$,解得$m=\frac{|PF_1|-|PF_2|}{2c}+1=\frac{a}{c}+1=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. **答案** -1

命题意图 本题考查圆的公共弦及直线的平行关系.

解析 两圆的方程相减得$(8+2a)x+(6-2b)y+23=0$,$\because$直线$(8+2a)x+(6-2b)y+23=0$与$x+y=0$平行,$\therefore 8+2a=6-2b$,得$a+b=-1$.

14. **答案** 1

命题意图 本题考查空间向量的运算.

解析 $\overrightarrow{SO}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{SB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{SB}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SD})=\frac{2}{3}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD})=\frac{2}{3}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$. 所以$a+b+c=1$.

15. **答案** $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

命题意图 本题考查直线与双曲线的位置关系.

解析 由$\begin{cases}y=kx+1,\\ \frac{x^2}{4}-y^2=1,\end{cases}$可得$(1-4k^2)x^2-8kx-8=0$. 由题可知$\begin{cases}1-4k^2\neq 0,\\ \Delta>0,\\ \frac{-8}{1-4k^2}<0,\end{cases}$解得$-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$,$\therefore$实数$k$的取

值范围为$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

16. **答案** 135

命题意图 本题考查等差数列的性质.

解析 $\because \{a_n\}$是等差数列,$\therefore S_3,S_6-S_3,S_9-S_6,\cdots$也是等差数列,设其首项为$b_1$,公差为$d'$,则$nb_1+\frac{n(n-1)d'}{2}=6n^2+3n$,即$\frac{d'}{2}n^2+\left(b_1-\frac{d'}{2}\right)n=6n^2+3n$,$\therefore \begin{cases}\frac{d'}{2}=6,\\ b_1-\frac{d'}{2}=3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}b_1=9,\\ d'=12.\end{cases}$ $\therefore S_3=a_1+a_2+a_3=3a_2=9$,$\therefore a_2=3$,又$S_6-S_3=a_4+a_5+a_6=3a_5$,$\therefore S_6-S_3-S_3=3(a_5-a_2)=12$,即$a_5-a_2=4$,$\therefore a_5=7$. 设数列$\{a_n\}$的公差为$d$,则$3d=4$,解得$d=\frac{4}{3}$,$\therefore a_{101}=a_2+(101-2)\times\frac{4}{3}=3+132=135$.

三、解答题:共70分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查等比数列的性质.

解析 (Ⅰ)$\because a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$,

$\therefore a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{n+1}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$, ……………………(2分)

两式相比得$a_{n+1}=2^n$.

$\because \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^n}{2^{n-1}}=2$,

$\therefore \{a_n\}$是等比数列. ……………………(5分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)得$a_n=2^{n-1}$.

由$2^{n-1}=8^{22-3m}$,得$2^{n-1}=2^{66-9m}$,

$\therefore n=67-9m$. ……………………(7分)

$\because n\geqslant 1$,$\therefore 67-9m\geqslant 1$,解得$m\leqslant\frac{22}{3}$. ……………………(8分)

$\because m\in\mathbf{N}^*$,

$\therefore m$的最大值为7.

$\therefore 8^{22-3m}(m\in\mathbf{N}^*)$可能是数列$\{a_n\}$中的项,

m的最大值为7. ……………………(10分)

18. **命题意图** 本题考查抛物线的定义与性质.

解析 (Ⅰ)$\because M(x,y)$到$F(2,0)$的距离与到y轴的距离的差为2,

$\therefore M(x,y)$到$F(2,0)$的距离与到直线$x=-2$的距离相等. ……………………(2分)

$\therefore$动点M的轨迹是抛物线, ……………………(3分)

其方程为$y^2=8x$. ……………………(5分)

(Ⅱ)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

$\because S_{\triangle DHF}:S_{\triangle EHF}=2:1$,

$\therefore y_1=-2y_2$, ……………………(7分)

$\therefore \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1^2}{y_2^2}=4$. ……………………(8分)

又$\frac{x_1-2}{2-x_2}=2$,即$x_1+2x_2=6$, ……………………(9分)

解得 $x_1=4,x_2=1$. ……（10分）

$\therefore |AB|=p+x_1+x_2=4+5=9$. ……（12分）

19. **命题意图** 本题考查圆的方程的求解及直线与圆的位置关系.

解析 （Ⅰ）由图可知 $E(1,0),F(0,2),D(2,3)$. ……（1分）

设计一个经过点 D,E,F 的圆，则圆心 H 为所建建筑物的中心.

设圆 H 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则 $\begin{cases}1+D+F=0,\\4+2E+F=0,\\13+2D+3E+F=0,\end{cases}$ ……（2分）

解得 $\begin{cases}D=-3,\\E=-3,\\F=2.\end{cases}$ ……（4分）

$\therefore$ 圆 H 的方程为 $x^2+y^2-3x-3y+2=0$，即 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$， ……（5分）

$\therefore$ 建筑物的中心的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$. ……（6分）

（Ⅱ）$\because |EF|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，圆 H 的半径为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$， ……（8分）

$\therefore$ 点 H 到 EF 的距离为 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$， ……（10分）

$\therefore$ 开通的这条路的最低造价为 $\frac{\sqrt{5}}{2}\times100=50\sqrt{5}\approx50\times2.24=112$（万元）. ……（12分）

20. **命题意图** 本题考查等比数列与等差数列的通项公式及错位相减法.

解析 （Ⅰ）当 $n=1$ 时，$a_1=2a_1+1-4$，得 $a_1=3$. ……（1分）

$\because S_n=2a_n+n-4$①，

$\therefore$ 当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}+n-5$②， ……（2分）

①－②得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}+1$，即 $2a_{n-1}=a_n+1$，

即 $2(a_{n-1}-1)=a_n-1$. ……（3分）

由题易知 $a_{n-1}-1\neq0$，$\therefore \frac{a_n-1}{a_{n-1}-1}=2$.

又 $a_1-1=2$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n-1\}$ 是首项为2，公比为2的等比数列， ……（4分）

$\therefore a_n-1=2^n$，即 $a_n=2^n+1$. ……（5分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $c_n=2c_{n-1}+2^n$， ……（6分）

$\therefore \frac{c_n}{2^n}-\frac{c_{n-1}}{2^{n-1}}=1$，又 $\because c_1=2$，

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{c_n}{2^n}\right\}$ 是等差数列，其首项为1，公差为1. ……（7分）

$\therefore \frac{c_n}{2^n}=n$，即 $c_n=n\cdot2^n$. ……（8分）

$T_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$， ……（9分）

$2T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+n\times 2^{n+1}$, …………（10 分）

$\therefore -T_n=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n-n\times 2^{n+1}$

$=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n\times 2^{n+1}$, …………（11 分）

$\therefore T_n=(n-1)2^{n+1}+2$. …………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查空间向量的应用.

解析 （Ⅰ）$\because PA\perp$ 圆 O 所在平面，$BC\subset$ 圆 O 所在平面，

$\therefore PA\perp BC$. …………（1 分）

$\because$ 点 C 是圆周上不同于 A,B 的一点，

$\therefore AC\perp BC$. …………（2 分）

又 $PA\cap AC=A$,

$\therefore BC\perp$ 平面 PAC. …………（3 分）

又 $PC\subset$ 平面 PAC,

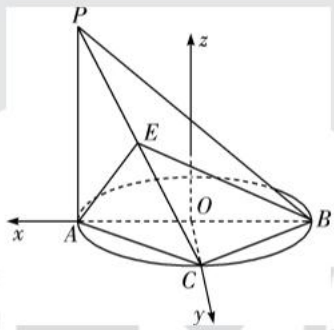
$\therefore PC\perp BC$. …………（4 分）

（Ⅱ）如图，连接 OC，$\because AC=BC$，$\therefore OC\perp AB$. …………（5 分）

以 O 为原点，直线 OA,OC 分别为 x,y 轴，以过点 O 且平行于直线 PA 的直线为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $C(0,1,0),A(1,0,0),P(1,0,2),B(-1,0,0)$. …………（6 分）

$\therefore \overrightarrow{PC}=(-1,1,-2),\overrightarrow{CB}=(-1,-1,0)$.



设 $E(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{PE}=(x-1,y,z-2)$. …………（7 分）

$\because \overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PC}$,

$\therefore \begin{cases}x-1=-\lambda,\\ y=\lambda,\\ z-2=-2\lambda,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1-\lambda,\\ y=\lambda,\\ z=2-2\lambda,\end{cases}$

$\therefore E(1-\lambda,\lambda,2-2\lambda)$.

$\therefore \overrightarrow{AE}=(-\lambda,\lambda,2-2\lambda)$. …………（8 分）

设平面 PCB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\end{cases}\therefore \begin{cases}-x_1+y_1-2z_1=0,\\ x_1+y_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$. …………（9 分）

设 AE 与平面 PCB 所成的角为 α,

则 $\sin\alpha=\frac{|\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AE}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|-\lambda-\lambda-(2-2\lambda)|}{\sqrt{2\lambda^2+(2-2\lambda)^2}\times\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3(6\lambda^2-8\lambda+4)}}$. ………………………………… (10 分)

$\because \cos\alpha=\frac{1}{3}$,$\therefore \sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,$\therefore 6\lambda^2-8\lambda+4=\frac{3}{2}$,

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$或$\frac{5}{6}$. …………………………………………………………………………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查椭圆的方程与性质,及直线与椭圆的位置关系.

解析 (Ⅰ)由题可知圆 $O:x^2+y^2=1$ 与椭圆 M 有且只有两个公共点, ……………………………… (1 分)

这两个公共点为短轴的顶点$(0,1)$,$(0,-1)$,

$\therefore b=1$. ……………………………………………………………………………………… (2 分)

$\because c=1$,$\therefore a^2=b^2+c^2=2$. ……………………………………………………………… (3 分)

$\therefore$ 椭圆 M 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)当直线 l_1 的斜率不为 0,且斜率存在时,

设直线 l_1 的方程为 $x=my-1$($m\neq0$ 且 $m\neq\pm1$).

联立方程组得$\begin{cases}x=my-1,\\x^2+2y^2-2=0,\end{cases}$

消去 x 得$(m^2+2)y^2-2my-1=0$. ……………………………………………………………… (5 分)

设 $A(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,

则 $y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2}$,$y_1y_2=\frac{-1}{m^2+2}$. ……………………………………………………… (6 分)

$\therefore |AC|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{\left(\frac{2m}{m^2+2}\right)^2+\frac{4}{m^2+2}}=2\sqrt{2}\frac{m^2+1}{m^2+2}$.

同理得$|BD|=2\sqrt{2}\frac{m^2+1}{2m^2+1}$. ……………………………………………………………… (7 分)

$\therefore S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8(m^2+1)^2}{(m^2+2)(2m^2+1)}$.

令 $t=m^2+1$,则 $t>1$ 且 $t\neq2$,$S_{四边形ABCD}=\frac{4t^2}{(t+1)(2t-1)}=\frac{4}{-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+2}$. ……………………… (8 分)

$\because h(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+2$ 在$(1,2)$上单调递增,在$(2,+\infty)$上单调递减,

$\therefore h(t)<h(2)=\frac{9}{4}$,

$\therefore S_{四边形ABCD}>\frac{16}{9}$. ……………………………………………………………………………… (10 分)

当直线 l_1,l_2 其中一条的斜率不存在时,另一条的斜率为 0,

不妨设直线 l_1 的斜率为 0,则直线 l_1 的方程为 $y=0$,直线 l_2 的方程为 $x=1$.

易知$|AC|=2\sqrt{2}$,$|BD|=\sqrt{2}$,

$\therefore S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$.

综上,可知四边形 $ABCD$ 的面积大于$\frac{16}{9}$. …………………………………………………… (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。