泸县四中2020级高三第二次诊断性模拟考试

数 学（文史类）参考答案：

1. A 2. B 3. D 4. C 5. D 6. D 7. A 8. C 9. C 10. A 11. B 12. B

13. $x-y+1=0$ 14. $-\frac{7}{2}$ 15. $\frac{25}{2}$ 16. $-\frac{9}{28}$

17. 解：（1）设正项等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，

由$\begin{cases} a_1+a_2+10=2a_3, \\ S_3-a_2=10, \end{cases}$解得$a_1=q=2$，所以$a_n=2^n$，

$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$．

（2）由（1）得$b_n=\log_2(S_n+2)\cdot a_n=(\log_2 2^{n+1})\cdot 2^n=(n+1)\cdot 2^n$，

所以$T_n=2\times2+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+(n+1)\times2^n$，①

$2T_n=2\times2^2+3\times2^3+\cdots+(n+1)\times2^{n+1}$，②

①-②得$-T_n=2^2+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)\cdot2^{n+1}=2^2+\frac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2}-(n+1)\cdot2^{n+1}=-n\cdot2^{n+1}$，

所以$T_n=n\cdot2^{n+1}$．

18. 解：（1）依题意，由$\frac{p}{40+p}=\frac{3}{5}$，得$p=60$，所以$q=40$，$x=y=100$，

所以，2×2列联表如下表所示：

	未感染病毒	感染病毒	总计
未注射疫苗	40	60	100
注射疫苗	60	40	100
总计	100	100	200

由$K^2=\frac{200\times(40\times40-60\times60)^2}{100\times100\times100\times100}=8>7.879$，所以有99.5%的把握认为注射此疫苗有效；

（2）设"恰有1只为注射过疫苗"为事件A，

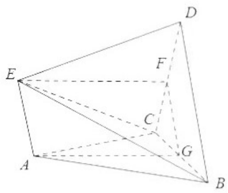
由于在感染病毒的小白鼠中，按未注射疫苗和注射疫苗的比例$\frac{60}{40}=\frac{3}{2}$抽取，

故抽取的5只小白鼠中有3只未注射疫苗，分别用1、2、3来表示，2只已注射疫苗的小白鼠分别用a、b来表示，

从这5只小白鼠中随机抽取3只，可能的情况有：$(1,2,3)$、$(1,2,a)$、$(1,2,b)$、$(1,3,a)$、$(1,3,b)$、$(1,a,b)$、$(2,3,a)$、$(2,3,b)$、$(2,a,b)$、$(3,a,b)$，共10种，

其中恰有1只为注射过疫苗有：$(1,2,a)$、$(1,2,b)$、$(1,3,a)$、$(1,3,b)$、$(2,3,a)$、$(2,3,b)$，共6种，

所以$P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，即恰有1只为注射过疫苗的概率为$\frac{3}{5}$．



19. (1)取CD，BC的中点分别为F和G，连接EF，AG，FG，

因为$\triangle ABC$和$\triangle CDE$均为边长为2的等边三角形，所以$EF\perp CD$，$AG\perp BC$，

且$EF=AG=\sqrt{3}$，因为平面$CDE\perp$平面BCD，平面CDE与平面BCD的交线为C..，

$EF\subset$平面CDE，所以$EF\perp$平面BCD；因为平面$ABC\perp$平面BCD，

平面ABC与平面BCD的交线为BC，$AG\subset$平面ABC，所以$AG\perp$平面BCD，

所以$EF//AG$，又$EF=AG=\sqrt{3}$，所以四边形$EFGA$为平行四边形，所以$AE//FG$，

又因为CD，BC的中点分别为F和G，所以$FG//BD$，结合$AE//FG$，所以$AE//BD$

(2)取AE，BD的中点分别为P，Q，分别连接PC，PQ，CQ，因为$AE//BD$，

$AB=ED=2$，所以四边形$AEDB$为等腰梯形，所以$PQ\perp BD$，又$AC=EC$，

AE的中点为P，所以$PC\perp AE$，因为$PC\subset$平面PCQ，$PQ\subset$平面PCQ，$PC\cap PQ=P$，

所以$AE\perp$平面PCQ，又因为$AE//BD$，$AE\subset$平面ACE，$BD\not\subset$平面ACE，

所以$BD//$平面ACE，所以点B到平面ACE的距离等价于点Q到平面ACE的距离，

即点Q到平面PCE的距离，所以$V_{Q-PCE}=V_{E-PCQ}$，设点Q到平面PCE的距离为h，

所以$\frac{1}{3}\times S_{\triangle PCE}\times h=\frac{1}{3}\times S_{\triangle PCQ}\times PE$，所以$h=\frac{S_{\triangle PCQ}\times PE}{S_{\triangle PCE}}$，因为$AE=FG=1$，

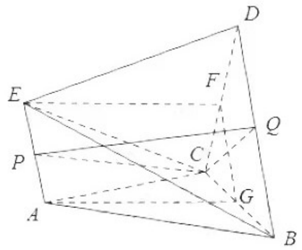
所以$PE=\frac{1}{2}$，因为$AC=CE=2$，所以$PC=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，

所以$S_{\triangle PCE}=\frac{1}{2}\times PE\times PC=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$，因为四边形$AEDB$为等腰梯形，

$AB=ED=BD=2$，$AE=1$，所以$PQ=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，又$CQ=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

所以在等腰三角形PCQ中，底边CQ上的高为：$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，

所以$S_{\triangle PCQ}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$，所以$h=\frac{S_{\triangle PCQ}\times PE}{S_{\triangle PCE}}=\frac{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{8}}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$，



所以点B到平面ACE的距离为：$\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

20．解：（1）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

当$AB//l$时，AB的方程为$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$即$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$，

由$\begin{cases}x^2=2py\\ y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\end{cases}$可得$x^2-px-3p=0$，$\Delta>0$，

$\because P$为AB的中点，$\therefore\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{p}{2}=1$，$\therefore p=2$，$C$的方程为$x^2=4y$；

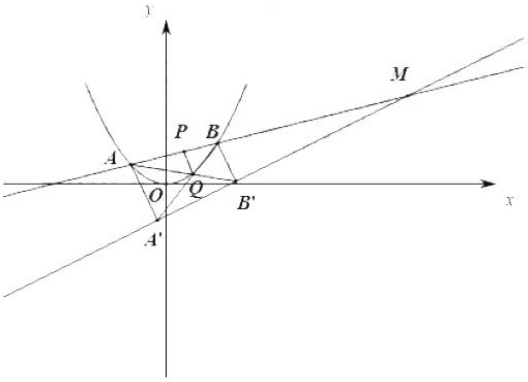
（2）证明：当$AB//l$时，则四边形$ABB'A'$为矩形，Q为AB'的中点，

由（1）可知P为AB的中点，

$\therefore PQ$为$\triangle ABB'$的中位线，$PQ//AA'//BB'$；

6

当 AB 与 l 不平行时，设 AB 与 l 相交于 $M\left(x_0,y_0\right)$，不妨设从左至右依次为点 A、B、M，如图，



由题意 $AA'//BB'$ 显然成立，只要证 $PQ//BB'$，即证 $\dfrac{|AP|}{|PB|}=\dfrac{|AQ|}{|QB'|}$，

又 $AA'//BB'$，

$\therefore \dfrac{|AQ|}{|QB'|}=\dfrac{|AA'|}{|BB'|}=\dfrac{|AM|}{|BM|}$，$\therefore$ 只要证 $\dfrac{|AP|}{|PB|}=\dfrac{|AM|}{|BM|}$，

即证 $\dfrac{1-x_1}{x_2-1}=\dfrac{x_0-x_1}{x_0-x_2}$，即证 $2x_0+2x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)\left(x_0+1\right)=0$.

设直线 AB 的方程为 $y=k\left(x-1\right)+2$，则 $k\neq\dfrac{1}{2}$，

由 $\begin{cases} y=k(x-1)+2 \\ y=\dfrac{1}{2}x-2 \end{cases}$，解得 $x_0=\dfrac{2k-8}{2k-1}$.

由 $\begin{cases} y=k(x-1)+2 \\ x^2=4y \end{cases}$ 可得 $x^2-4kx+4k-8=0$，$\Delta>0$，

$\therefore x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=4k-8$，

$\therefore 2x_0+2x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)\left(x_0+1\right)=\dfrac{4k-16}{2k-1}+8k-16-4k\left(\dfrac{2k-8}{2k-1}+1\right)=0$，得证；综上，$PQ//AA'//BB'$.

21．解：（1）函数 $f\left(x\right)$ 的导函数 $f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-2ax+2a, f''\left(x\right)=\mathrm{e}^x-2a$，

当 $a\leq 0$ 时，$f''\left(x\right)>0$，所以 $f'\left(x\right)$ 在 R 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f''\left(x\right)>0\Rightarrow x>\ln 2a$，$f''\left(x\right)<0\Rightarrow x<\ln 2a$，

所以 $f'\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,\ln 2a\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln 2a,+\infty\right)$ 上单调递增.

综述：当 $a\leq 0$ 时，$f'\left(x\right)$ 在 R 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f'\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,\ln 2a\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln 2a,+\infty\right)$ 上单调递增.

（2）因为对 $\forall x\in \mathrm{R}, \left(x-2\right)\cdot f\left(x\right)\geq 0$ 恒成立，

所以当$x\ge 2$时，$f(x)\ge 0$；当$x\le 2$时，$f(x)\le 0$，则$f(2)=0$，所以$b=-e^2$.

所以$f(x)=e^x-ax^2+2ax-e^2$且连续不断.$f'(x)=e^x-2ax+2a$，$f''(x)=e^x-2a$，

情形一：当$x\ge 2$时，

当$a\le\frac{e^2}{2}$时，$f''(x)\ge 0,f'(x)$在$[2,+\infty)$上单调递增，

又因为$f'(2)=e^2-2a\ge 0$，所以$f(x)$在$[2,+\infty)$上单调递增，

所以$f(x)\ge f(2)=0$，满足题意.

当$a>\frac{e^2}{2}$时，由（1）知$f'(x)$在$(2,\ln 2a)$上单调递减，所以$f'(x)<f'(2)<0$，

所以$f(x)$在$(2,\ln 2a)$上单调递减，所以$f(x)<f(2)=0$，不符合题意.

情形二：当$x\le 2$时，

当$a<0$时，由$f\left(\frac{e^2}{2a}\right)=e^{\frac{e^2}{2a}}-\frac{e^4}{4a}>0$，知$f(x)\le 0$不恒成立；.

当$a=0$时，$f(x)=e^x-e^2$，易知$(x-2)\cdot f(x)\ge 0$恒成立.

当$0<a\le\frac{e^2}{2}$时，

由（1）知$f'(x)$的最小值$f'(\ln 2a)=2a(2-\ln 2a)\ge 0$，

所以$f(x)$在$(-\infty,2]$单调递增，而$f(2)=0$，所以$f(x)\le f(2)=0$成立.综上可得a的取值范围为$\left[0,\frac{e^2}{2}\right]$.

22.（1）∵$\rho=2\cos\theta$，∴曲线C_2的直角坐标方程为∴$(x-1)^2+y^2=1$，

∵α是曲线C_1：$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$的参数，∴$C_1$的普通方程为$x^2+(y-1)^2=t^2$，

∵C_1与C_2有且只有一个公共点，∴$|t|=\sqrt{2}-1$或$|t|=\sqrt{2}+1$，

∴C_1的普通方程为$x^2+(y-1)^2=(\sqrt{2}-1)^2$或$x^2+(y-1)^2=(\sqrt{2}+1)^2$

（2）∵t是曲线C_1：$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$的参数，∴$C_1$是过点$A$（0，1）的一条直线，

设与点P，Q相对应的参数分别是t_1，t_2，把$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$，代入$(x-1)^2+y^2=1$得$t^2+2(\sin\alpha-\cos\alpha)t+1=0$，∴$\begin{cases}t_1+t_2=-2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\\ t_1t_2=1\end{cases}$

∴$\frac{1}{|AP|}+\frac{1}{|AQ|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=|t_1|+|t_2|=|t_1+t_2|=2\sqrt{2}\left|\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right|\le 2\sqrt{2}$，

当$\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$时，△=4（sinα - cosα）^{2} - 4=4>0，

$\dfrac{1}{|AP|}+\dfrac{1}{|AQ|}$取最大值$2\sqrt{2}$.

23．解：（1）不等式$f(x)\langle 6-|x-2|$，即$|3x+2|+|x-2|<6$.

当$x<-\dfrac{2}{3}$时，即$-3x-2-x+2<6$，得$-\dfrac{3}{2}<x<-\dfrac{2}{3}$；

当$-\dfrac{2}{3}\le x\le 2$时，即$3x+2-x+2<6$，得$-\dfrac{3}{2}\le x<1$；

当$x>2$时，即$3x+2+x-2<6$，无解.

综上，原不等式的解集为$\left(-\dfrac{3}{2},1\right)$.

（2）$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)(m+n)=\dfrac{1}{4}\left(1+1+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}\right)\ge 1$.

令$g(x)=|x-a|-f(x)=|x-a|-|3x+2|=\begin{cases}2x+2+a, x<-\dfrac{2}{3}\\ -4x-2+a, -\dfrac{2}{3}\le x\le a,\\ -2x-2-a, x>a.\end{cases}$

结合函数$g(x)$的图象易知：当$x=-\dfrac{2}{3}$时，$g(x)_{\max}=\dfrac{2}{3}+a$.

∴要使不等式恒成立，只需$g(x)_{\max}=\dfrac{2}{3}+a\le 1$，即$0<a\le\dfrac{1}{3}$，

故所求实数a的取值范围是$\left(0,\dfrac{1}{3}\right]$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线