2023 年哈三中高三学年
第一次高考模拟考试 数学 试卷答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	A	B	B	D	A	C	BD	AC	AD	BC

二、填空题：

13. -10　　14. 2　　15. 31　　16. $4;1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

三、解答题：

17. （1）$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R, bc=4R^2\sin B\sin C$

$2\sin B\sin C=1+\cos B\cos C$ $\cos(B+C)=-\dfrac{1}{2}=-\cos A$

$\cos A=\dfrac{1}{2}, A\in(0,\pi), A=\dfrac{\pi}{3}$

（2）$\angle CDA=2\angle B, C=\dfrac{2\pi}{3}-B$

$\dfrac{CD}{\sin\angle DAC}=\dfrac{AD}{\sin C}$，即 $\dfrac{CD}{\sin(\dfrac{\pi}{3}-B)}=\dfrac{AD}{\sin(\dfrac{2\pi}{3}-B)}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\dfrac{1}{2}\sin B)$

$\dfrac{3}{2}\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B$

$\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

18. （1）$\begin{cases}3a_1+12d=27\\ a_1(a_1+4d)=(a_1+d)^2\end{cases}$，$\because d>0$，$\therefore\begin{cases}a_1=1\\ d=2\end{cases}$

$\therefore a_n=2n-1$

（2）$b_n=\dfrac{(2n-1)\cdot 2^n}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{2^{n+1}}{2n+3}-\dfrac{2^n}{2n+1}$

$\therefore T_n=\dfrac{2^{n+1}}{2n+3}-\dfrac{2}{3}$

19. （1）取AD中点O，连接OB,OP

$\because \Delta PAD$为等边三角形，$\therefore OP\perp AD, OA=1\ OP=\sqrt{3}$

又$\because$平面$PAD\perp$平面$ABCD$,平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD, OP\subset$平面PAD

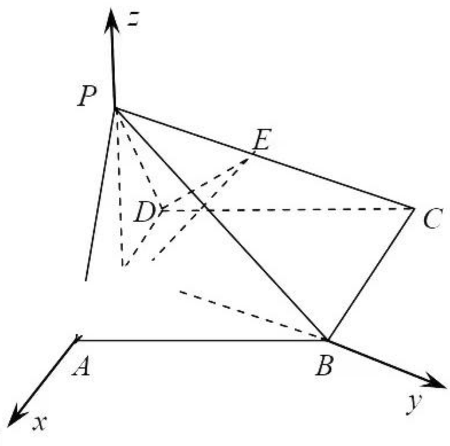
$\therefore OP\perp$平面 ABC，又$\because OB\subset$平面$ABCD,\therefore OP\perp OB$

$\because PB\perp\ BC\ \ BC/\ \ AD\ \ PB$

又$\because OP\perp AD, OP\subset$平面$POB, PB\subset$平面$POB, OP\cap PB=P$

$\therefore AD\perp$平面 PO，又$\because OB\subset$平面$POB,\therefore AD\perp OB$

$\therefore OB=\sqrt{3}$，$PB=\sqrt{6}$



设点A到平面PBC的距离为h

则$\dfrac{1}{3}S_{\Delta PBC}\cdot h=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot OP$

$\therefore h=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

（2）分别以OA,OB,OP为x轴,y轴,z轴的正方向

建立如图所示的空间直角坐标系

则 $P(0,0,\sqrt{3}), C(-2,\sqrt{3},0), A(1,0,0), D(-1,0,0)$

设 $\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PC}$，则 $E(-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda), \overrightarrow{AE}=(-2\lambda-1,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$

$\because OP\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ABCD$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$

$\left|\cos<\overrightarrow{AE},\overrightarrow{n_1}>\right|=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，$\therefore E(-\dfrac{2}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2}{3}\sqrt{3})$

$\therefore$ 平面 ADE 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(0,2,-1)$

$\therefore$ 平面 ADE 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值为 $\left|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

20. （1）①设事件 A =“摸出的两个球中恰好有一个红球”

$$P(A)=\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$$

② X 可取 $0,1,2$，$P(X=k)=\dfrac{C_3^kC_5^{2-k}}{C_8^2},k=0,1,2$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

$$E(X)=2\times\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$$

（2）设事件 B =“丁取到红球”，事件 C =“甲、乙、丙三人中至少有 1 人取出白球”

$$P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{\frac{C_4^2C_4^1}{C_8^3}\times\frac{4}{7}+\frac{C_4^1C_4^2}{C_8^3}\times\frac{3}{7}+\frac{C_4^3}{C_8^3}\times\frac{2}{7}}{\frac{C_4^3}{C_8^3}\times\frac{5}{7}+\frac{C_4^2C_4^1}{C_8^3}\times\frac{4}{7}+\frac{C_4^1C_4^2}{C_8^3}\times\frac{3}{7}+\frac{C_4^3}{C_8^3}\times\frac{2}{7}}=\frac{44}{49}$$

21. （1）$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$

（2）$\begin{cases}3y^2+4x^2-12=0\\ x=my+1\end{cases}$，$(3+4m^2)y^2+8my-8=0$

$$y_1+y_2=\frac{-8m}{4m^2+3},y_1y_2=\frac{-8}{4m^2+3},y_1+y_2=my_1y_2$$

若存在常数t，使得四边形AA_1B_1B的对角线交于一定点，由对称性知，该定点一定在x轴上，设该定点为$D(s,0)$，则A_1,B,D共线，A,B_1,D共线

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$A_1(t,y_1)$，，

则$\overrightarrow{A_1B}=(x_2-t,y_2-y_1),\overrightarrow{A_1D}=(s-t,-y_1)$，则$-y_1(x_2-t)=(y_2-y_1)(s-t)$

$$s=\frac{-my_1y_2-y_1+ty_2}{y_2-y_1}=\frac{-(y_1+y_2)-y_1+ty_2}{y_2-y_1}=\frac{(t-1)y_2-2y_1}{y_2-y_1}$$

则$t-1=2,t=3,s=2$

同理，A,B_1,D共线，$t=3,s=2$

$\therefore$存在常数$t=3$，使得四边形AA_1B_1B的对角线交于一定点，该定点为$(2,0)$

22. （1）当$a=0$时，$g(x)=xe^x-\ln x-x-1$.

方法一：$g(x)$定义域$(0,+\infty)$，$g'(x)=(x+1)(e^x-\frac{1}{x})$

令$h(x)=e^x-\frac{1}{x},h'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$上递增

$\because h(1)=e-1>0, h(\frac{1}{2})=\sqrt{e}-2<0$，$\therefore h(x)$在$(\frac{1}{2},1)$上有唯一零点$x_0$

即$h(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$

在$(0,x_0)$上，$h(x)<0$，即$g'(x)<0$，$g(x)$在$(0,x_0)$递减

在$(x_0,+\infty)$上，$h(x)>0$，即$g'(x)>0$，$g(x)$在$(x_0,+\infty)$上递增

$\because e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}\ \therefore x_0=-\ln x_0$

$\therefore g(x)_{\min}=g(x_0)=x_0e^{x_0}-\ln x_0-x_0-1=1+x_0-x_0-1=0$

方法二：先证：$e^x\geq x+1$，当$x=0$时，取“=”

$xe^x=e^{x+\ln x}\geq x+\ln x+1$（存在$x_0$使$x_0+\ln x_0=0$）

$\therefore xe^x-x-\ln x-1\geq 0$成立

（2）$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+1$，依题意，$f'(1)=0\ \therefore a=1$

即$f(x)=\ln x-x^2+x+1$，$f'(x)=\dfrac{-(2x+1)(x-1)}{x}$

$\therefore f(x)$在$(0,1)$递增，$(1,+\infty)$递减．$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=1$

$\therefore$在$(1,+\infty)$上，$\ln x-x^2+x+1<1$，即$\ln x<x(x-1)$，$\dfrac{\ln x}{x-1}<x$

取$x=\dfrac{1}{n}+1$，则$\dfrac{\ln(\frac{1}{n}+1)}{\frac{1}{n}}<\dfrac{1}{n}+1$，即$n\ln(\dfrac{1}{n}+1)<\dfrac{1}{n}+1$

$\therefore \ln(1+1)+2\ln(\dfrac{1}{2}+1)+\cdots+n\ln(\dfrac{1}{n}+1)<(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n})+n$

而$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$<1+\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

$=1+2(\sqrt{2}-1)+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

$=2\sqrt{n}-1$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\ln(1+\dfrac{1}{k})^k=\ln(1+1)+2\ln(\dfrac{1}{2}+1)+\cdots+n\ln(\dfrac{1}{n}+1)<2\sqrt{n}-1+n=(\sqrt{n}+1)^2-2$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜
自主选拔在线