高三数学试题

2022.4

命题人：付振凯　鹿洪岭　孙凯　卫华　侯怀有　冯莹莹

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，第Ⅰ卷1—2页，第Ⅱ卷3—4页，共150分，测试时间120分钟.

注意事项：

选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在测试卷上.

准考证号＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　学校＿＿＿＿

第Ⅰ卷(共60分)

一、选择题(本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{x|x^2+x-2\leqslant 0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,1\}$　　B. $[0,1]$　　C. $[-2,1]$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 已知 m,n 是两条不重合的直线，α 是一个平面，$n\subset\alpha$，则“$m\perp\alpha$”是“$m\perp n$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 i 是虚数单位，a,b 均为实数，且 $\dfrac{b+ai}{3+i}=1-i$，则点 (a,b) 所在的象限为

A. 一　　B. 二　　C. 三　　D. 四

4. 已知 $a>0$，二项式 $(x+\dfrac{a}{x^2})^6$ 的展开式中所有项的系数和为64，则展开式中的常数项为

A. 36　　B. 30　　C. 15　　D. 10

5. 为了得到函数 $y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 的图象，可以将函数 $y=\cos 2x$ 图象

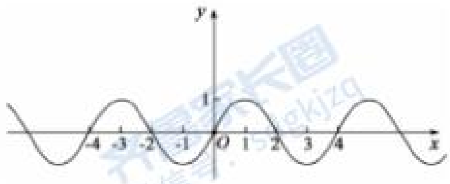
A. 向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位　　B. 向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位

C. 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位　　D. 向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位

6. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$，若 $P(X<2-a)=0.3$，则 $P(2-a<X<a)=$

A. 0.2　　B. 0.3　　C. 0.4　　D. 0.6

7. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数，其导函数 $f'(x)$ 的图象见下图，且 $f(x+2)=f(2-x)$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则下列说法正确的是



A. $f(-1)<f(\dfrac{1}{2})<f(\dfrac{5}{2})$

B. $f(\dfrac{5}{2})<f(\dfrac{1}{2})<f(-1)$

C. $f(-1)<f(\dfrac{5}{2})<f(\dfrac{1}{2})$

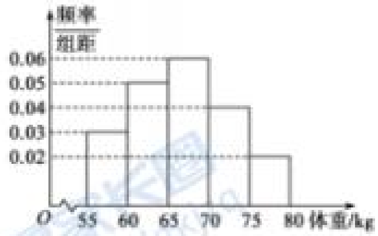
D. $f(\dfrac{1}{2})<f(-1)<f(\dfrac{5}{2})$

8. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{16}=1(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{4}{3}x$，F_1,F_2 分别为该双曲线的左右焦点，M 为双曲线上的一点，则 $|MF_2|+\dfrac{16}{|MF_1|}$ 的最小值为

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 12

二、多选题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.)

9. 教育部办公厅"关于进一步加强中小学生体质健康管理工作的通知"中指出,各地要加强对学生体质健康重要性的宣传,中小学校要通过体育与健康课程、大课间、课外体育锻炼、体育竞赛、班团队活动、家校协同联动等多种形式加强教育引导,让家长和中小学生科学认识体质健康的影响因素,了解运动在增强体质、促进健康、预防肥胖与近视、锤炼意志、健全人格等方面的重要作用,提高学生体育与健康素养,增强体质健康管理的意识和能力. 某学校共有 2000 名男生,为了了解这部分学生的身体发育情况,学校抽查了 100 名男生的体重情况. 根据所得数据绘制样本的频率分布直方图如图所示,则



A. 样本的众数为 $67\frac{1}{2}$　　　　B. 样本的 80%分位数为 $72\frac{1}{2}$

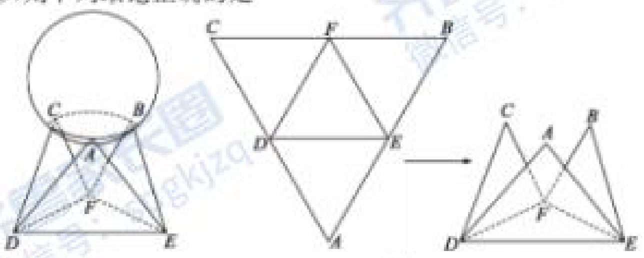
C. 样本的平均值为 66　　　　D. 该校男生中低于 60 公斤的学生大约为 300 人

10. 已知 O 为坐标原点,$A(\sqrt{3},0)$,$B(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$,$P(\cos\alpha,\sin\alpha)(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{3})$,则下列结论正确的是

A. $\triangle OAB$ 为等边三角形　　　　B. $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}$ 最小值为$\sqrt{3}$

C. 满足 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AB}$ 的点 P 有两个　　　　D. 存在一点 P 使得 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OP}$

11. 某地举办数学建模大赛,本次大赛的冠军奖杯由一个铜球和一个托盘组成,如图①,已知球的表面积为 16π,托盘由边长为 8 的等边三角形铜片沿各边中点的连线垂直向上折叠而成,如图②,则下列结论正确的是



①　　　　②

A. 直线 AD 与平面 DEF 所成的角为$\frac{\pi}{3}$

B. 经过三个顶点 A,B,C 的球的截面圆的面积为$\frac{8\pi}{3}$

C. 异面直线 AD 与 CF 所成角的余弦值为$\frac{5}{8}$

D. 球上的点到底面 DEF 的最大距离为 $2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}+2$

12. 若函数 $f(x)=\ln x+a(x^2-2x+1)(a\in\mathbf{R})$存在两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,则

A. 函数 $f(x)$ 至少有一个零点　　　　B. $a<0$ 或 $a>2$

C. $0<x_1<\frac{1}{2}$　　　　D. $f(x_1)+f(x_2)>1-2\ln2$

第Ⅱ卷(共90分)

三、填空题(本题共4小题,每小题5分,共20分.)

13. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\leqslant 0,\\ \ln x, x>0,\end{cases}$ 若 $f(a)=1$,则 $a=$_______.

14. 已知角 θ 的终边过点 $A(3,y)$,且 $\sin(\pi+\theta)=\frac{4}{5}$,则 $\tan\theta=$_______.

15. 已知抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F,O 为坐标原点,$A(t,1)$ 是抛物线第一象限上的点,$|AF|=5$,直线 AF 与抛物线的另一个交点为 B,则 $S_{\triangle AOB}=$_______.

16. 十九世纪下半叶集合论的创立,奠定了现代数学的基础.著名的"康托三分集"是数学理性思维的构造产物,具有典型的分形特征,其操作过程如下:将闭区间 $[0,1]$ 均分为三段,去掉中间的区间段 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$,记为第1次操作;再将剩下的两个区间 $[0,\frac{1}{3}]$,$[\frac{2}{3},1]$ 分别均分为三段,并各自去掉中间的区间段,记为第2次操作;…;每次操作都在上一次操作的基础上,将剩下的各个区间分别均分为三段,同样各自去掉中间的区间段;操作过程不断地进行下去,剩下的区间集合即是"康托三分集".第三次操作后,依次从左到右第三个区间为_______,若使前 n 次操作去掉的所有区间长度之和不小于 $\frac{26}{27}$,则需要操作的次数 n 的最小值为_______.($\lg 2=0.30$,$\lg 3=0.47$)

四、解答题(本大题共6小题,共70分,解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17.(本小题满分10分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\frac{1}{2}$,且满足 $a_{n+1}=\frac{a_n}{3-2a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)证明 $\{\frac{1}{a_n}-1\}$ 是等比数列,并求数列 a_n 的通项公式;

(2)记 $b_n=n(\frac{1}{a_n}-1)$,求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.(本小题满分12分)

2021年12月17日,工信部发布的《"十四五"促进中小企业发展规划》明确提出建立"百十万千"的中小企业梯度培育体系,引导中小企业走向"专精特新"、"小巨人"、"隐形冠军"的发展方向."专精特新"是指具备专业化、精细化、特色化、新颖化优势的中小企业.下表是某地各年新增企业数量的有关数据:

年份(年)	2017	2018	2019	2020	2021
年份代码(x)	1	2	3	4	5
新增企业数量(y)	8	17	29	24	42

(1)请根据上表所给的数据,求出 y 关于 x 的线性回归方程,并预测2023年此地新增企业的数量;

(2)若在此地进行考察,考察企业中有4个为"专精特新"企业,3个为普通企业,现从这7个企业中随机抽取3个,用 X 表示抽取的3个为"专精特新"企业个数,求随机变量 X 的分布列与期望.

参考公式：回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中，斜率和截距最小二乘法估计公式分别为

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2},\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}.$$

19.（本小题满分 12 分）

在① $2c=a\sin C+\sqrt{3}c\cos A$ ② $\sqrt{3}\sin(A+C)\cos A=3\sin A\sin B$

③ $2\cos A(c\cos B+b\cos C)=\sqrt{3}a$，这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并给出解答.

问题：已知 $\triangle ABC$ 中，D 为 AB 边上的一点，且 $BD=2AD$，______.

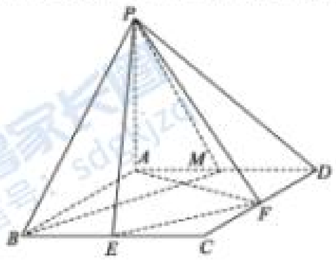
(1)若 $B=\frac{\pi}{6}$，求 $\angle BCD$ 大小；

(2)若 $CD=CB$，求 $\cos\angle ACB$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

20.（本小题满分 12 分）

《九章算术》是中国古代张苍、耿寿昌所撰写的一部数学专著，是《算经十书》中最重要的一部，成于公元一世纪左右，是当时世界上最简练有效的应用数学专著，它的出现标志着中国古代数学形成了完整的体系. 在《九章算术·商功》篇中提到"阳马"这一几何体，是指底面为矩形，有一条侧棱垂直于底面的四棱锥. 现有"阳马" $P\text{-}ABCD$，底面为边长为 2 的正方形，侧棱 $PA\perp$ 面 $ABCD$，$PA=2$，E、F 为边 BC、CD 上的点，且 $\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CD}$，点 M 为 AD 的中点.



(1)若 $\lambda=\frac{1}{2}$，证明：面 $PBM\perp$ 面 PAF；

(2)是否存在实数 λ，使二面角 $P-EF-A$ 的大小为 $45°$？如果不存在，请说明理由；如果存在，求此时直线 BM 与面 PEF 所成角的正弦值.

21.（本小题满分 12 分）

已知 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A，B 的坐标分别为 $(-\sqrt{3},0)$，$(\sqrt{3},0)$，圆 E 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，在边 AC，BC，AB 上的切点分别为 P，Q，R，$|CP|=2-\sqrt{3}$，动点 C 的轨迹为曲线 G.

(1)求曲线 G 的方程；

(2)设直线 l 与曲线 G 交于 M、N 两点，点 D 在曲线 G 上，O 是坐标原点，$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OD}$，判断四边形 $OMDN$ 的面积是否为定值？若为定值，求出该定值；如果不是，请说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\cos^2x+a(x^2-1)$，$g(x)=1-\cos x$.

(1)当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 图象在 $(\frac{\pi}{4},f(\frac{\pi}{4}))$ 处的切线方程；

(2)当 $a\geqslant1$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

(3)若 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导数，$f'(\frac{x}{2})\geqslant g(x)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

高三数学试题参考答案

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. A　2. A　3. B　4. C　5. B　6. C　7. D　8. B

二、多项选择题(共 4 小题,每小题至少 2 个以上的答案正确,错选 0 分,漏选 2 分,全对 5 分,共 20 分)

9. ABD　10. AD　11. AC　12. ACD

三、填空题(共 4 个小题,每小题 5 分,本题满分 20 分)

13. 0 或 e　　14. $-\frac{4}{3}$　　15. 40　　16. $[\frac{2}{9},\frac{7}{27}]$　9

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (1) $a_{n+1}=\frac{a_n}{3-2a_n}\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}-2$ ………… 1 分

所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-1=3(\frac{1}{a_n}-1)$.

即 $\{\frac{1}{a_n}-1\}$ 是等比数列 ………… 3 分

则 $\{\frac{1}{a_n}-1\}$ 的首项为 $\frac{1}{a_1}-1=1$,公比为 3,所以 $\frac{1}{a_n}-1=3^{n-1}$.

所以 $a_n=\frac{1}{3^{n-1}+1}$ ………… 5 分

(2) $b_n=n(\frac{1}{a_n}-1)=n\cdot 3^{n-1}$. ………… 6 分

所以 $S_n=1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots+n\cdot 3^{n-1}$　①

$3S_n=3+2\cdot 3^2+\cdots+(n-1)\cdot 3^{n-1}+n\cdot 3^n$　② ………… 8 分

①－②得

$-2S_n=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\cdot 3^n=\frac{1-3^n}{1-3}-n\cdot 3^n$

所以 $S_n=\frac{(2n-1)\cdot 3^n+1}{4}$ ………… 10 分

18. (1) $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$, ………… 1 分

$\bar{y}=\frac{8+17+29+24+42}{5}=24$ ………… 2 分

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-2)\times(-16)+(-1)\times(-7)+0\times 5+1\times 0+2\times 18=75$

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=4+1+0+1+4=10$

所以 $b=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=7.5$ ………………………………………… 3 分

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=1.5$，所以 $\hat{y}=1.5+7.5x$. ………………………………………… 4 分

2023 年，即当 $x=7$ 时，由线性回归方程可得 $\hat{y}=54$，所以估计 2023 年此地新增企业的数量约为 54 家. ………………………………………… 6 分

(2) 由题意可知，X 的可能取值为 0，1，2，3. ………………………………………… 7 分

因为 $P(X=0)=\dfrac{C_3^3}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$，$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$，$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\dfrac{18}{35}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{4}{35}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{4}{35}$

…… 11 分

所以 $EX=0\times\dfrac{1}{35}+1\times\dfrac{12}{35}+2\times\dfrac{18}{35}+3\times\dfrac{4}{35}=\dfrac{12}{7}$. ………………………………………… 12 分

19. 解：若选①

因为 $a\sin C=c\sin A$，所以 $2c=a\sin C+\sqrt{3}c\cos A=c\sin A+\sqrt{3}c\cos A$，

所以 $2=\sin A+\sqrt{3}\cos A$　所以 $2\sin(A+\dfrac{\pi}{3})=2$

所以 $\sin(A+\dfrac{\pi}{3})=1$ ………………………………………… 2 分

因为 $0<A<\pi$　所以 $A+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$

所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$ ………………………………………… 4 分

若选②

因为 $\sqrt{3}\sin(A+C)\cos A=\sqrt{3}\sin B\cos A=3\sin A\sin B$

所以 $\sqrt{3}\cos A=3\sin A$

所以 $\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ………………………………………… 2 分

因为 $0<A<\pi$ 所以 $A=\frac{\pi}{6}$ ………………………………………………………… 4 分

若选③

因为 $c\cos B+b\cos C=a$

所以 $2\cos A(c\cos B+b\cos C)=2\cos A\cdot a=\sqrt{3}a$

所以 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ………………………………………………………………… 2 分

因为 $0<A<\pi$ 所以 $A=\frac{\pi}{6}$ ………………………………………………………… 4 分

(1)若 $B=\frac{\pi}{6}$，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，且 $C=\frac{2}{3}\pi$ ……………………………………… 5 分

设腰长 $AC=BC=x$，则 $AB=\sqrt{3}x$ 所以 $BD=\frac{2}{3}AB=\frac{2}{3}\sqrt{3}x$

由余弦定理 $CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cos B$

$=x^2+\frac{4}{3}x^2-2x^2=\frac{1}{3}x^2$ ……………………………………………… 6 分

所以 $CD^2+BC^2=BD^2$ 所以 $CD\perp BC$

$\angle BCD=90^\circ$ ………………………………………………………………………… 8 分

(2)取 BD 的中点 E，连接 CE，由 $CB=CD$ 得 $CE\perp AB$

设 $AC=2t$，$(t>0)$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，$AE=AC\cdot\cos A=2t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}t$，

$CE=2t\cdot\sin A=2t\cdot\frac{1}{2}=t$，$BE=\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{3}}{2}t$，$BC=\sqrt{BE^2+CE^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}t$ ……… 10 分

由余弦定理得 $\cos\angle ACB=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{4t^2+\frac{7}{4}t^2-\frac{27}{4}t^2}{2\times 2t\times\frac{\sqrt{7}}{2}t}=-\frac{\sqrt{7}}{14}$ ……… 12 分

20. (1)$\lambda=\frac{1}{2}$时，点 E、F 为 BC 及 CD 的中点.

连接 AF，与 BM 交于点 G，

在$\triangle ABM$ 和$\triangle DAF$ 中，$AB=AD$，$AM=DF$，$\angle BAM=\angle ADF=90^\circ$，

所以$\triangle ABM\cong\triangle DAF$，于是$\angle ABM=\angle FAD$. ……………………………………… 1 分

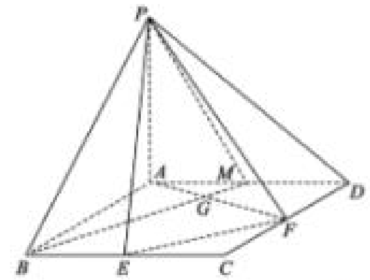
而$\angle FAD+\angle BAF=90^\circ$，所以$\angle ABM+\angle BAF=90^\circ$，故$\angle AGB=90^\circ$，即 $BM\perp AF$ … 2 分

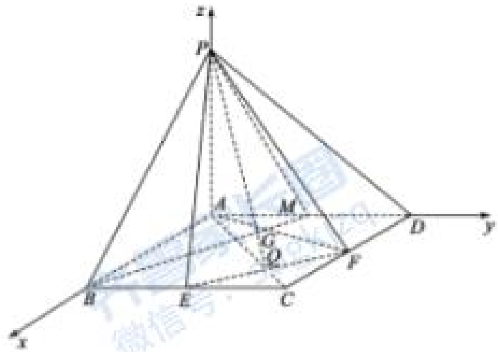
又 $PA\perp$ 面 $ABCD$，$BM\subset$ 面 $ABCD$，所以 $PA\perp BM$ ……………………………………… 3 分

因为 $BM\perp PA$，$BM\perp AF$，$PA\subset$ 面 PAF，$AF\subset$ 面 PAF，$PA\cap AF=A$，

所以 $BM\perp$ 面 PAF ………………………………………………………………………… 4 分

又因为 $BM\subset$ 面 PBM，所以面 $PBM\perp$ 面 PAF。…………………………………… 5分





(2)连接 AC，交 EF 于点 Q，连接 PQ，记 BD 与 AC 交于点 O。

因为 $\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CD}$，所以 $EF//BD$，因为 $AC\perp BD$，所以 $AC\perp EF$，

从而 $PQ\perp EF$，所以 $\angle AQP$ 为二面角 P-EF-A 的一个平面角 ………………………… 6分

由题意，$\angle AQP=45^\circ$，从而 $AQ=PA=2$，所以 $CQ=2\sqrt{2}-2$。

于是 $\lambda=\dfrac{CE}{CB}=\dfrac{CQ}{CO}=\dfrac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$，所以 $CE=CF=4-2\sqrt{2}$，$BE=DF=2\sqrt{2}-2$ …… 7分

如图，以 AB 方向为 x 轴，AD 方向为 y 轴，AP 方向为 z 轴建立空间直角坐标系，…… 8分

于是 $P(0,0,2)$，$E(2,2\sqrt{2}-2,0)$，$F(2\sqrt{2}-2,2,0)$，$B(2,0,0)$，$M(0,1,0)$，

$\overrightarrow{BM}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{PE}=(2,2\sqrt{2}-2,-2)$，$\overrightarrow{PF}=(2\sqrt{2}-2,2,-2)$，………………… 9分

设面 PEF 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PE}=2x+(2\sqrt{2}-2)y-2z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PF}=(2\sqrt{2}-2)x+2y-2z=0\end{cases}$，得：$\begin{cases}x=y\\ z=\sqrt{2}x\end{cases}$。

取 $x=1$，则 $y=1$，$z=\sqrt{2}$，则 $\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{2})$ ……………………………………………… 10分

所以直线 BM 与面 PEF 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BM}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{BM}|}\right|$

$=\left|\dfrac{-2+1}{\sqrt{4}\times\sqrt{5}}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ ……………………………………………………………… 12分

21. (1)因为圆 E 为 $\triangle ABC$ 的内切圆，所以 $|CA|+|CB|=|CP|+|CQ|+|PA|+|QB|$ $=2|CP|+|AR|+|BR|=2|CP|+|AB|=4>|AB|$，所以点 C 的轨迹为以点 A 和点 B 为焦点的椭圆。……………………………………………………………… 2分

所以 $c=\sqrt{3}$，$a=2$，$b=1$，所以曲线 G 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1(y\neq 0)$ ………………… 4分

(2)由 $y\neq 0$ 可知直线 l 的斜率存在，设直线 l 方程是 $y=kx+m$，由平面图形 $OMDN$ 是四边形，可知 $m\neq 0$，代入到$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

所以$\triangle=16(4k^2+1-m^2)>0$，$x_1+x_2=\dfrac{-8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}$，…………………… 6分

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{2m}{1+4k^2}$，$|MN|=\sqrt{1+k^2}\times\frac{4\sqrt{4k^2-m^2+1}}{1+4k^2}$

点 O 到直线 MN 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$。 …………………………………………………… 8 分

由 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OD}$，得 $x_D=\frac{-8km}{1+4k^2}$，$y_D=\frac{2m}{1+4k^2}$，

因为点 D 在曲线 C 上，所以将 D 点坐标代入椭圆方程得 $1+4k^2=4m^2$。 ……… 10 分

由题意四边形 $OMDN$ 为平行四边形，

所以 $OMDN$ 的面积为 $S=\sqrt{1+k^2}\times\frac{4\sqrt{4k^2-m^2+1}}{1+4k^2}\times\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{4|m|\sqrt{4k^2-m^2+1}}{1+4k^2}$，

由 $1+4k^2=4m^2$ 得 $S=\sqrt{3}$，故四边形 $OMDN$ 的面积是定值，其定值为 $\sqrt{3}$。 …… 12 分

22. (1)当 $a=0$ 时，$f(x)=\cos^2 x$

$f'(x)=-2\cos x\sin x=-\sin 2x$

$k=f'(\frac{\pi}{4})=-1$ …………………………………………………………………… 1 分

$f(\frac{\pi}{4})=\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$，

所以 $y-\frac{1}{2}=-1(x-\frac{\pi}{4})$

$x+y-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}=0$。 …………………………………………………………………… 2 分

(2)因为 $f'(x)=-2\cos x\sin x+2ax=-\sin 2x+2ax$

$f''(x)=-2\cos 2x+2a=2(a-\cos 2x)$ ………………………………………………… 3 分

当 $a\geq 1$ 时，$f''(x)\geq 0$ 恒成立，

所以 $f'(x)=-\sin 2x+2ax$ 单调递增，且 $f'(0)=0$ ……………………………… 4 分

则在 $(-\infty,0)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减

则在 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增 ………………………… 5 分

$f(0)=1-a$，所以，函数 $f(x)$ 的极小值为 $1-a$，无极大值。 ……………………… 6 分

(3)已知 $f'(x)=-\sin 2x+2ax$，$f'(\frac{x}{2})=-\sin x+ax$，由 $f'(\frac{x}{2})\geq g(x)$

即 $-\sin x+ax\geq 1-\cos x\Rightarrow ax\geq \sin x+1-\cos x$ 在 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 恒成立

$a\geq\frac{\sin x+1-\cos x}{x}$ 在 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 恒成立 ………………………………………… 7 分

设 $h(x)=\frac{\sin x+1-\cos x}{x}$，$x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$

$h'(x)=\frac{x(\cos x+\sin x)-(\sin x+1-\cos x)}{x^2}$ ……………………………………… 8 分

设 $m(x)=x(\cos x+\sin x)-(\sin x+1-\cos x)$

$m'(x)=\cos x+\sin x-x\sin x+x\cos x-\cos x-\sin x=x(\cos x-\sin x)$

由 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$可得 $\cos x<0,\sin x>0$

所以 $m'(x)=x(\cos x-\sin x)<0$ ………………………………………………………… 9 分

则 $m(x)$在 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$上单调递减，可得 $m(x)<m(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-2<0$ ……………… 10 分

所以 $h'(x)=\frac{m(x)}{x^2}<0$，$h(x)$在$(\frac{\pi}{2},\pi)$上单调递减，$h(x)<h(\frac{\pi}{2})=\frac{4}{\pi}$ …………… 11 分

则 a 的取值范围是$[\frac{4}{\pi},+\infty)$ ………………………………………………………… 12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索