2022年高考诊断性测试

数 学

注意事项：

1. 本试题满分150分，考试时间为120分钟.
2. 答卷前，务必将姓名和准考证号填涂在答题纸上.
3. 使用答题纸时，必须使用0.5毫米的黑色签字笔书写，要字迹工整，笔迹清晰；超出答题区书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效.

准考证号________ 姓名________ 学校________

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-4>0\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 若复数 z 满足 $(1+2\mathrm{i})z=4+3\mathrm{i}$，则 $\overline{z}=$

A. $-2+\mathrm{i}$　　B. $-2-\mathrm{i}$　　C. $2+\mathrm{i}$　　D. $2-\mathrm{i}$

3. 设 $x,y\in\mathbf{R}$，则“$x<1$且$y<1$”是“$x+y<2$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

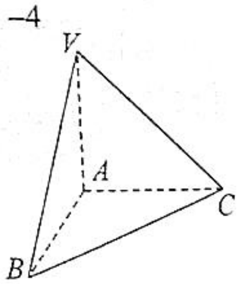
4. 若非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

5. 已知点 F 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，点 P 在抛物线上且横坐标为8，O 为坐标原点，若 ΔOFP 的面积为 $2\sqrt{2}$，则该抛物线的准线方程为

A. $x=-\dfrac{1}{2}$　　B. $x=-1$　　C. $x=-2$　　D. $x=-4$

6. 如图，三棱锥 $V-ABC$ 中，$VA\perp$底面 ABC，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC=AV=2$，则该三棱锥的内切球和外接球的半径之比为



A. $(2-\sqrt{3}):1$　　B. $(2\sqrt{3}-3):1$

C. $(\sqrt{3}-1):3$　　D. $(\sqrt{3}-1):2$

7. “碳中和”是指企业、团体或个人等测算在一定时间内直接或间接产生的温室气体排放总量，通过植树造林、节能减排等形式，以抵消自身产生的二氧化碳排放量，实现二氧化碳“零排放”. 某“碳中和”研究中心计划派5名专家分别到 A,B,C 三地指导“碳中和”工作，每位专家只去一个地方，且每地至少派驻1名专家，则分派方法的种数为

A. 90　　B. 150　　C. 180　　D. 300

8. 过直线 $x-y-m=0$ 上一点 P 作圆 $M:(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 的两条切线，切点分别为 A,B，若使得四边形 $PAMB$ 的面积为 $\sqrt{7}$ 的点 P 有两个，则实数 m 的取值范围为

A. $-5<m<3$　　B. $-3<m<5$　　C. $m<-5$ 或 $m>3$　　D. $m<-3$ 或 $m>5$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $f(x)$ 的图象，则

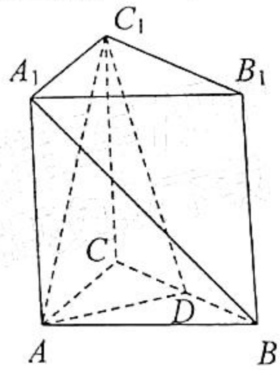
A. $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$　　B. $(\frac{\pi}{6},0)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心

C. 当 $x=-\frac{\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最大值　　D. 函数 $f(x)$ 在区间 $[\pi,\frac{5\pi}{4}]$ 上单调递增

10. 甲罐中有3个红球、2个黑球，乙罐中有2个红球、2个黑球，先从甲罐中随机取出一球放入乙罐，以 A 表示事件“由甲罐取出的球是红球”，再从乙罐中随机取出一球，以 B 表示事件“由乙罐取出的球是红球”，则

A. $P(A)=\frac{3}{5}$　　B. $P(B|A)=\frac{2}{5}$　　C. $P(B)=\frac{13}{25}$　　D. $P(A|B)=\frac{9}{13}$

11. 如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面 ABC 是边长为2的等边三角形，$AA_1=3$，D 为 BC 中点，则



A. 直线 A_1B // 平面 ADC_1

B. 点 B_1 到平面 ADC_1 的距离为 $\frac{3}{5}\sqrt{10}$

C. 异面直线 A_1B_1 与 C_1D 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

D. 设 P,Q 分别在线段 A_1B_1,DC_1 上，且 $\frac{A_1P}{A_1B_1}=\frac{DQ}{DC_1}$，则 PQ 的最小值为 $\sqrt{3}$

12. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$，$F_1,F_2$ 为 C 的左、右焦点，则

A. 双曲线 $\frac{x^2}{4+m}-\frac{y^2}{5+m}=1\,(m>0)$ 和 C 的离心率相等

B. 若 P 为 C 上一点，且 $\angle F_1PF_2=90^\circ$，则 ΔF_1PF_2 的周长为 $6+2\sqrt{14}$

C. 若直线 $y=tx-1$ 与 C 没有公共点，则 $t<-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $t>\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

D. 在 C 的左、右两支上分别存在点 M,N 使得 $4\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1N}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 $\sin\alpha=\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{6})$，则 $\tan 2\alpha$ 的值为______.

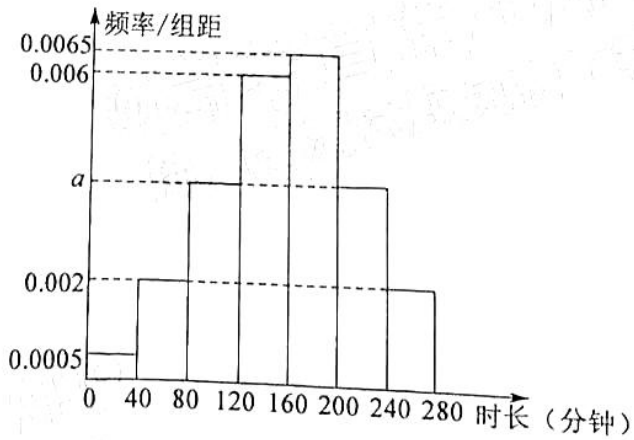
14. 若 $(1-2x)^n$ 的展开式中 x^3 项的系数为 -160，则正整数 n 的值为______.

15. 已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x)+f(2-x)=0$，当 $-1<x<0$ 时，$f(x)=2^x$，则 $f(2+\log_2 5)$ 的值为______.

16. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，三元二次方程所对应的曲面统称为二次曲面. 比如方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 表示球面，就是一种常见的二次曲面. 二次曲面在工业、农业、建筑等众多领域应用广泛. 已知点 $P(x,y,z)$ 是二次曲面 $4x^2-xy+y^2-z=0$ 上的任意一点，且 $x>0$，$y>0$，$z>0$，则当 $\dfrac{z}{xy}$ 取得最小值时，$\dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z})$ 的最大值为______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10 分）2022 年 2 月 4 日至 20 日，第 24 届冬季奥林匹克运动会在北京成功举办. 这场冰雪盛会是运动健儿奋力拼搏的舞台，也是中外文明交流互鉴的舞台，折射出我国更加坚实的文化自信，诠释着新时代中国的从容姿态，传递出中华儿女与世界人民“一起向未来”的共同心声. 某学校统计了全校学生观看北京冬奥会开幕式和闭幕式的时长情况（单位：分钟），并根据样本数据绘制得到右图所示的频率分布直方图.



（1）求频率分布直方图中 a 的值，并估计样本数据的 85% 分位数；

（2）采用样本量比例分配的分层随机抽样方式，从观看时长在 $[200,280]$ 的学生中抽取 6 人. 若从这 6 人中随机抽取 3 人在全校交流观看体会，设抽取的 3 人中观看时长在 $[200,240)$ 的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

18.（12分）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_4=9$，$S_3=15$.

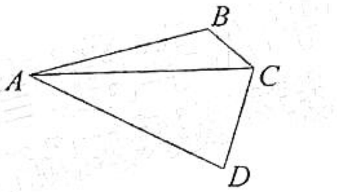
（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）保持数列$\{a_n\}$中各项先后顺序不变，在a_k与a_{k+1}（$k=1,2,\cdots$）之间插入2^k个1，使它们和原数列的项构成一个新的数列$\{b_n\}$，记$\{b_n\}$的前n项和为T_n，求T_{100}的值.

19.（12分）如图，四边形$ABCD$中，$AB^2+BC^2+AB\cdot BC=AC^2$.

（1）若$AB=3BC=3$，求ΔABC的面积；

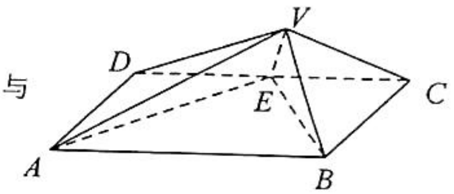
（2）若$CD=\sqrt{3}BC$，$\angle CAD=30^\circ$，$\angle BCD=120^\circ$，求$\angle ACB$的值.



20.（12分）如图，在四棱锥$V-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，$AB=2BC=4$，E为CD的中点，且ΔVBC为等边三角形.

（1）若$VB\perp AE$，求证：$AE\perp VE$；

（2）若二面角$A-BC-V$的大小为30°，求直线AV与平面VCD所成角的正弦值.



21.（12分）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，依次连接$C$的四个顶点所得菱形的面积为4.

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）若$A(-2,0)$，直线$l:y=kx+m$与C交于两点P,Q，且$AP\perp AQ$，试判断直线l是否过定点？若是，求出此定点的坐标；若不是，说明理由.

22.（12分）已知函数$f(x)=\frac{1}{2}ax^2-x-\ln x$（$a\in\mathbf{R}$）.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$x\geqslant 1$时，$|f(x)|\geqslant 2$，求a的取值范围；

（3）证明：$\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln k}>1-\frac{1}{n}$.

2022年高考诊断性测试

数学参考答案及评分标准

一、选择题

1. D　2. C　3. A　4. B　5. B　6. C　7. B　8. A

二、选择题

9. BD　10. ACD　11. ABD　12. BC

三、填空题

13. $\sqrt{3}$　14. 6　15. $-\frac{4}{5}$　16. $\frac{2}{3}$

四、解答题

17. 解：(1) 由题意 $40\times(0.0005+0.002\times2+2a+0.006+0.0065)=1$，

解得 $a=0.004$. ……………………………………2分

由频率分布直方图可知，观看时长在200分钟以下样本占比为

$40\times(0.0005+0.002+0.004+0.006+0.0065)=0.76$.

观看时长在240分钟以下的样本所占比例为 $0.76+40\times0.004=0.92$.

所以85%分位数位于 $[200,240)$ 内，……………………………………3分

样本数据的85%分位数为 $200+40\times\frac{0.85-0.76}{0.92-0.76}=222.5$. ……………………5分

(2) 由题意，观看时长 $[200,240)$、$[240,280]$ 对应的频率分别为0.16和0.08，所以采用分层随机抽样的方式在两个区间中应分别抽取4人和2人. ……………………6分

于是抽取的3人中观看时长在 $[200,240)$ 中的人数 X 的所有可能取值为1,2,3.

所以，$P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2\cdot C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$.

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

……………………9分

所以，$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$. ……………………10分

18. 解：(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由已知 $a_1+3d=9$，$3a_1+3d=15$. ……………………2分

解得 $a_1=3$，$d=2$. ……………………4分

所以 $a_n=2n+1$； ……………………5分

(2) 因为 a_k 与 a_{k+1} ($k=1,2,\cdots$) 之间插入 2^k 个1，所以 a_k 在 $\{b_n\}$ 中对应的项数为

$n=k+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{k-1}=k+\frac{2-2^k}{1-2}=2^k+k-2$，

当 $k=6$ 时，$2^k+k-2=68$，当 $k=7$ 时，$2^k+k-2=133$，

所以 $a_6=b_{68}$，$a_7=b_{133}$，且 $b_{69}=b_{70}=\cdots=b_{100}=1$. ……………………9 分

因此 $T_{100}=S_6+(2\times1+2^2\times1+2^3\times1+\cdots+2^5\times1)+32\times1$

$=\frac{6}{2}\times(3+13)+\frac{2-2^6}{1-2}+32=142$. ……………………12 分

19. 解：（1）在 ΔABC 中，$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{-AB\cdot BC}{2AB\cdot BC}=-\frac{1}{2}$，……2 分

因为 $0^\circ<B<180^\circ$，所以 $B=120^\circ$. ……………………3 分

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times3\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. ……………………5 分

（2）设 $\angle ACB=\theta$，则 $\angle ACD=120^\circ-\theta$，$\angle ADC=30^\circ+\theta$，$\angle BAC=60^\circ-\theta$.

在 ΔACD 中，由 $\frac{AC}{\sin(30^\circ+\theta)}=\frac{CD}{\sin30^\circ}$，得 $AC=\frac{\sin(30^\circ+\theta)}{\sin30^\circ}CD$. ……7 分

在 ΔABC 中，由 $\frac{AC}{\sin120^\circ}=\frac{BC}{\sin(60^\circ-\theta)}$，得 $AC=\frac{\sin120^\circ}{\sin(60^\circ-\theta)}BC$. ……8 分

联立上式，并由 $CD=\sqrt{3}BC$，得 $\sqrt{3}\frac{\sin(30^\circ+\theta)}{\sin30^\circ}=\frac{\sin120^\circ}{\sin(60^\circ-\theta)}$，……9 分

整理得 $\sin(30^\circ+\theta)\sin(60^\circ-\theta)=\frac{1}{4}$，所以 $\sin(60^\circ+2\theta)=\frac{1}{2}$，……10 分

因为 $0^\circ<\theta<60^\circ$，所以 $60^\circ<60^\circ+2\theta<180^\circ$，

所以 $60^\circ+2\theta=150^\circ$，解得 $\theta=45^\circ$，即 $\angle ACB$ 的值为 45°. ……………………12 分

20. 解：（1）因为 E 为 CD 的中点，所以 $AD=DE=2$，所以 ΔADE 为等腰直角三角形，

所以 $\angle AED=45^\circ$. 同理，$\angle BEC=45^\circ$. 所以 $AE\perp BE$. ……………………2 分

又因为 $VB\perp AE$，且 $VB\cap BE=B$，$VB\subset$ 面 VBE，$BE\subset$ 面 VBE，

所以 $AE\perp$ 面 VBE. ……………………4 分

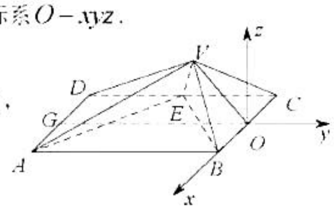
因为 $VE\subset$ 面 VBE，所以 $AE\perp VE$. ……………………5 分

（2）取 BC 中点 O，AD 中点 G，连接 OG,VO，则 $OG\perp BC$.

又 ΔVBC 为等边三角形，所以 $VO\perp BC$，所以 $\angle GOV$ 为二面角 $A-BC-V$ 的一个平面角. 所以 $\angle GOV=30^\circ$ ……………………7 分

以 $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{GO}$ 方向分别作为 x,y 轴正方向，建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

于是 $A(1,-4,0)$，$C(-1,0,0)$，$D(-1,-4,0)$，$V(0,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，



$\overrightarrow{DC}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{CV}=(1,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AV}=(-1,\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$. ……………………8 分

令 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 VCD 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CV}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}4y=0\\ x-\frac{3}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$，令 $z=2$，得 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},0,2)$. ……10 分

设直线 AV 与平面 VCD 所成的角为 α，则

$\sin\alpha=|\cos<\overrightarrow{AV},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\overrightarrow{AV}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AV}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{42}}{14}$，

故直线 AV 与平面 VCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{14}$. ……………………12 分

21. 解：（1）由已知 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，连接 C 的顶点所得四边形面积 $2ab=4$， ………2 分

又 $a^2=b^2+c^2$，解得：$a^2=4$，$b^2=1$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………4 分

（2）设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx+m\end{cases}$，消 y 可得，

$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

则有 $\Delta=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2-4)>0$，即 $4k^2-m^2+1>0$，

$x_1+x_2=\frac{-8km}{1+4k^2},x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$， ……………………6 分

因为 $AP\perp AQ$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$，而 $\overrightarrow{AP}=(x_1+2,y_1),\overrightarrow{AQ}=(x_2+2,y_2)$，

故 $x_1x_2+2(x_1+x_2)+4+y_1y_2=0$， ……………………7 分

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$=k^2(\frac{4m^2-4}{1+4k^2})+km(\frac{-8km}{1+4k^2})+m^2=\frac{m^2-4k^2}{1+4k^2}$，

$x_1x_2+2(x_1+x_2)+4+y_1y_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}-\frac{16km}{1+4k^2}+4+\frac{m^2-4k^2}{1+4k^2}$

$=\dfrac{5m^2-16km+12k^2}{1+4k^2}=0$， ………………………………………………………… 9分

解得 $m=2k$ 或 $m=\dfrac{6}{5}k$． ………………………………………………………… 10分

当 $m=2k$ 时，直线 l 方程为 $y=k(x+2)$，过点 A，不满足题意， …………… 11分

当 $m=\dfrac{6}{5}k$ 时，代入 $4k^2-m^2+1=4k^2-\dfrac{36}{25}k^2+1=\dfrac{64}{25}k^2+1>0$，

直线 l 方程为 $y=k(x+\dfrac{6}{5})$，过定点 $(-\dfrac{6}{5},0)$． ………………………………… 12分

22．解：(1) $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=ax-1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax^2-x-1}{x}(x>0)$． …… 1分

记 $\varphi(x)=ax^2-x-1$．

当 $a\le 0$ 时，$\varphi(x)<0$，即 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减． ……2分

当 $a>0$ 时，令 $\varphi(x)=0$，得 $x_1=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$，$x_2=\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}$（舍去）．当 $x\in(0,x_1)$ 时，$\varphi(x)<0$，即 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$，即 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 单调递增． …………………………………………………………………… 3分

综上，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2a})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2a},+\infty)$ 单调递增． ……………………………………… 4分

(2) **解法一：** 由(1)知，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单减，所以 $f(x)\le f(1)=\dfrac{1}{2}a-1<0$．

此时 $|f(x)|_{\min}=1-\dfrac{a}{2}$，令 $1-\dfrac{a}{2}\ge 2$，解得 $a\le -2$． ………………………………… 5分

当 $a>0$ 时，若 $\varphi(1)=a-2\ge 0$，即 $a\ge 2$，由(1)，设 $\varphi(x)=0$ 的正根为 x_1，则必有 $x_1\le 1$，且当 $x\in(1,+\infty)$，$\varphi(x)>0$，即 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单增．此时

$f(x)\ge f(1)=\dfrac{a}{2}-1\ge 0$，$|f(x)|_{\min}=\dfrac{a}{2}-1$. 令$\dfrac{a}{2}-1\ge 2$，解得$a\ge 6$. ……………6 分

若$\varphi(1)=a-2<0$，即$a<2$，则当$x\in(1,x_1)$时，$\varphi(x)<0$，$f(x)$单减，当$x\in(x_1,+\infty)$时，$\varphi(x)>0$，$f(x)$单增，注意到$\varphi(x_1)=ax_1^2-x_1-1$，知$f(x)_{\min}=f(x_1)=\dfrac{1}{2}ax_1^2$

$-x_1-\ln x_1=\dfrac{1}{2}(x_1+1)-x_1-\ln x_1=\dfrac{1}{2}(1-x_1)-\ln x_1<0$.

又当$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，由零点存在定理$\exists x_0\in(x_1,+\infty)$，使$f(x_0)=0$，此时$|f(x)|_{\min}=0$，不满足题意.

综上，a的取值范围是$a\le -2$或$a\ge 6$. ……………………………………8 分

解法二：由（1）知，当$a\le 0$时，$f(x)$在$[1,+\infty)$单减，所以$f(x)\le f(1)=\dfrac{1}{2}a-1<0$.

此时$|f(x)|_{\min}=1-\dfrac{a}{2}$. 令$1-\dfrac{a}{2}\ge 2$，解得$a\le -2$. ……………………………5 分

当$a>0$时，$f(x)$在$(0,\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2a})$上单调递减，在$(\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2a},+\infty)$单调递增.

若$a\ge 2$，则$\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}\le 1$，$f(x)$在$[1,+\infty)$单增，所以$f(x)\ge f(1)=\dfrac{1}{2}a-1$. 此时

$f(x)\ge f(1)=\dfrac{a}{2}-1\ge 0$，$|f(x)|_{\min}=\dfrac{a}{2}-1$. 令$\dfrac{a}{2}-1\ge 2$，解得$a\ge 6$. ……………6 分

若 $0<a<2$，则 $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}>1$，$f(x)$ 在 $[1,\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2a})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2a},+\infty)$单调递增. 因为$f(1)=\dfrac{1}{2}a-1<0$，又当$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，由零点存在定理$\exists x_0\in(1,+\infty)$，使$f(x_0)=0$，与$|f(x)|\ge 2$矛盾.

综上，a的取值范围是$a\le -2$或$a\ge 6$. ……………………………………8 分

（3）由（2）知，当$a=2$时，对$x>1$，有$f(x)>f(1)=0$，即$x^2-x>\ln x$. ……9 分

又$x>1$时，$x^2-x>0$，$\ln x>0$，所以$\dfrac{1}{\ln x}>\dfrac{1}{x^2-x}$.

令 $x=k\,(k\ge 2)$，得 $\dfrac{1}{\ln k}>\dfrac{1}{k^2-k}=\dfrac{1}{k(k-1)}=\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$，……………………10 分

所以 $\dfrac{1}{\ln 2}>1-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{\ln 3}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{\ln 4}>\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$，…，$\dfrac{1}{\ln n}>\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$.

故 $\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{\ln k}>(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n})=1-\dfrac{1}{n}$，即 $\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{\ln k}>1-\dfrac{1}{n}$. ……12 分


微信搜一搜
自主选拔在线