

## 景德镇市 2023 届高三第二次质检试题

### 数学（文科）

命题 景德镇一中 江宁 黄卓颖 景德镇二中 余敏 乐平中学 徐新新

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

#### 第 I 卷（选择题）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{a, b\}$  的所有非空子集的元素之和等于 12，则  $a+b$  等于( )

- A. 1                      B. 3                      C. 4                      D. 6

2. 已知  $i$  为虚数单位，若复数  $\frac{a+i}{2-i}$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) 为纯虚数，则复数  $z = 2a - i$  在复平面上对应的点所在的象限为( )

- A. 第一象限              B. 第二象限              C. 第三象限              D. 第四象限

3. 已知向量  $\vec{a} = (2, 3)$ ,  $\vec{b} = (2, \sin \alpha - 3)$ ,  $\vec{c} = (2, \cos \alpha)$ , 若  $(\vec{a} + \vec{b}) \parallel \vec{c}$ , 则  $\tan \alpha$  的值为( )

- A. 2                      B. -2                      C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $-\frac{1}{2}$

4. 已知一个实心铜质的圆锥形材料的底面半径为 4，圆锥母线长  $2\sqrt{5}$ ，现将它熔化后铸成一个实心铜球，不计损耗，则铜球的表面积为( )

- A.  $8\pi$                       B.  $16\pi$                       C.  $24\pi$                       D.  $32\pi$

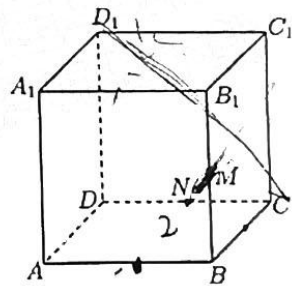
5. 斐波那契数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ),

设  $a_2 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + \dots + a_{2023} = a_k$ , 则  $k =$  ( )

- A. 2022                      B. 2023                      C. 2024                      D. 2025

6. 如图，已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2， $M$ ,  $N$  分别为  $BB_1$ ,  $CD$  的中点. 则下列选项中错误的是( )

- A. 直线  $MN \parallel$  平面  $CB_1D_1$   
 B. 三棱锥  $A_1 - MND_1$  在平面  $ABCD$  上的正投影图的面积为 4  
 C. 在棱  $BC$  上存在一点  $E$ , 使得平面  $AEB_1 \perp$  平面  $MNB$   
 D. 若  $F$  为棱  $AB$  的中点, 三棱锥  $M - NFB$  的外接球表面积为  $6\pi$

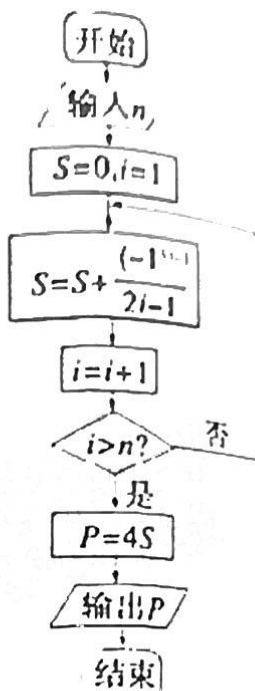


7. 已知抛物线  $C: y^2 = 2x$  的焦点为  $F$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  是  $C$  上两点, 若  $2x_2 - 4x_1 = 1$ ,

则  $\frac{|BF|}{|AF|} =$  ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       C.  $\sqrt{2}$                       D. 2

8. 德国数学家莱布尼兹于 1674 年得到了第一个关于  $\pi$  的级数展开式, 该公式于明朝初年传入我国. 我国数学家、天文学家明安图为了提高我国的数学研究水平, 从乾隆初年 (1736 年) 开始, 历时近 30 年, 证明了包括这个公式在内的三个公式, 同时求得了展开三角函数和反三角函数的 6 个新级数公式, 著有《割圆密率捷法》一书, 为我国用级数计算  $\pi$  开创先河. 如图所示的程序框图可以用莱布尼兹“关于  $\pi$  的级数展开式计算  $\pi$  的近似值 (其中  $P$  表示  $\pi$  的近似值)”. 若输入



$n=9$ , 输出的结果  $P$  可以表示为

- A.  $P = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{13})$
- B.  $P = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{15})$
- C.  $P = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{17})$
- D.  $P = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{19})$

9. 杨辉是南宋杰出的数学家, 他曾担任过南宋地方行政官员, 为政清廉, 足迹遍及苏杭一带. 杨辉一生留下了大量的著述, 他给出了著名的三角垛公式:

$1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+n) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ . 若正项数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项

和为  $S_n$ , 且满足  $S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ , 数列  $\{b_n\}$  的通项公式为  $b_n = a_n \cdot a_{n+1}$ , 则根据三角垛公式,

可得数列  $\{b_n\}$  的前 10 项和  $T_{10}$  (

- A. 440
- B. 480
- C. 540
- D. 580

10. 已知双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$  的左, 右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 直线  $l$  过  $F_2$  且与双曲线交于 A, B 两点, 若直线  $l$  不与  $x$  轴垂直, 且  $(\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ , 则直线  $l$  的斜率为 ( )

- A.  $\pm \frac{1}{2}$
- B.  $\pm \frac{\sqrt{3}}{5}$
- C.  $\pm \frac{\sqrt{15}}{5}$
- D.  $\pm \sqrt{3}$

11. 若抛掷两枚骰子出现的点数分别为  $a, b$ , 则“在函数  $f(x) = x^2 + ax + b$  的图像与  $x$  轴有交点的条件下, 满足函数  $g(x) = \frac{a^x - b^{-x}}{(a+b)x}$  为偶函数”的概率为 ( )

- A.  $\frac{4}{17}$
- B.  $\frac{2}{19}$
- C.  $\frac{5}{19}$
- D.  $\frac{3}{19}$

12. 若函数  $f(x) = t \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}$  恰有两个零点, 则实数  $t$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, -e)$
- B.  $(-\infty, -1)$
- C.  $(-\infty, -e) \cup (0, +\infty)$
- D.  $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

第II卷(非选择题)

本卷包括必考题和选考题两部分,第13题~第21题为必考题,每个试题考生都必须作答,第22题~第23题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 由于夏季炎热某小区用电量过大,据统计一般一天停电的概率为0.3,现在用数据0,1,2表示停电;用3,4,5,6,7,8,9表示当天不停电,现以两个随机数为一组,表示连续两天停电情况,经随机模拟得到以下30组数据,

28 21 79 14 56      74 06 89 53 90      14 57 62 30 93  
78 63 44 71 28      67 03 53 82 47      23 10 94 02 43

根据以上模拟数据估计连续两天中恰好有一天停电的概率为\_\_\_\_\_

14. 已知圆  $C: x^2 + y^2 = 9$ , 直线  $l: y = kx + 2\sqrt{2}$ , 若当  $k$  的值发生变化时, 直线被圆  $C$  所截弦长的最小值为\_\_\_\_\_.

15. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 且当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = e^x$ , 则满足  $f(x+1) \geq f(2x)$  的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

16. 若函数  $f(x) = \sin \omega x + \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$  ( $\omega > 0$ ), 在  $[0, \pi]$  上恰有一个极大值点和两个零点, 则实数  $\omega$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题: 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17~21题为必做题, 每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选做题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共60分.

17. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $\sin C \tan B = \cos C - 2\cos A$  且角  $A$  为锐角.

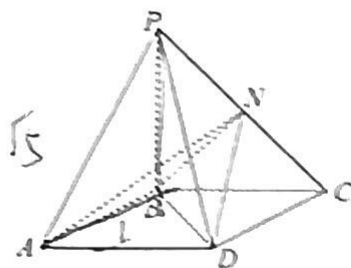
(1) 求角  $B$ ;

(2) 若  $\triangle ABC$  的面积为  $\sqrt{3}$ , 求  $b$  的最小值

18. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为平行四边形,  $\angle ABC = 120^\circ, AB = 1, PA = \sqrt{5}, PD \perp CD, PB \perp BD$ , 点  $N$  在棱  $PC$  上, 平面  $PBD \perp$  平面  $ABCD$ .

(1) 证明:  $AB \perp PB$

(2) 若  $PA \parallel$  平面  $BDN$ , 求三棱锥  $N-PAD$  的体积.



19.目前直播带货已经席卷全国了，不论老人小孩、男生女生，大家都听说或是尝试过直播购物，它所具有的能突破时间、空间限制的特点已经吸引了越来越多的人。由此可见，它的受众非常广泛，是大势所趋。不管是什么行业领域，都可以去从事直播带货。直播带货的兴起为人们提供了更多就业岗位。

小明是一名刚毕业的大学生，通过直播带货的方式售卖自己家乡的特产，下面是他近4个月的家乡特产收入 $y$ （单位：万元）情况，如表所示。

月份	5	6	7	8
时间代号 $t$	1	2	3	4
家乡特产收入 $y$	3.9	3.3	2.2	1.8

- (1) 根据5月至8月的数据，求 $y$ 与 $t$ 之间的线性相关系数（精确到0.01），并判断相关性；  
(2) 求出 $y$ 关于 $t$ 的回归直线方程，并预测9月收入能否突破1万元，请说明理由。

附：①相关系数公式：
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{y - n\bar{t}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

（若 $|r| > 0.95$ ，则线性相关程度非常强，可用线性回归模型拟合）

②一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，其回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率

和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ 。

③参考数据： $\sum_{i=1}^4 t_i y_i = 1 \times 3.9 + 2 \times 3.3 + 3 \times 2.2 + 4 \times 1.8 = 24.3$ ，

$$\sum_{i=1}^4 (y_i - \bar{y})^2 = 1.1^2 + 0.5^2 + 0.6^2 + 1^2 = 2.82$$

$$\sqrt{14.1} \approx 3.75.$$

20. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左右焦点分别为  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$ ,  $M, N$  分别为左右顶点, 直线  $l: x = ty + 1$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 当倾斜角为  $\frac{2\pi}{3}$  时,  $A$  是椭圆的上顶点, 且  $\triangle AF_1F_2$  的周长为 6.

- (1) 求椭圆  $C$  的方程;
- (2) 过点  $N$  作  $x$  轴的垂线  $l_1$ ,  $D$  为  $l_1$  上异于点  $N$  的一点, 以  $DN$  为直径作圆  $E$ . 若过点  $F_2$  的直线  $l_2$  (异于  $x$  轴) 与圆  $E$  相切于点  $H$ , 且  $l_2$  与直线  $DM$  相交于点  $P$ , 试判断  $|PF_1| + |PH|$  是否为定值, 并说明理由.

21. 已知函数  $f(x) = \frac{(x+1)(a + \ln x)}{x}$

- (1) 若函数  $f(x)$  在定义域上单调递增, 求  $a$  的最大值;
- (2) 若函数  $f(x)$  在定义域上有两个极值点  $x_1$  和  $x_2$ , 若  $x_2 \geq 4x_1$ , 求  $\sqrt{x_1 x_2}$  的最大值.

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题做答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系中，曲线  $C_1$ ：
$$\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数})$$
 经过伸缩变换 
$$\begin{cases} x = 3x \\ y = 2y \end{cases}$$
 得到曲线  $C_2$ ，

在以坐标原点为极点， $x$  轴的正半轴为极轴的极坐标系中，直线  $l$  的极坐标方程为  $2\rho\cos\theta + \sqrt{3}\rho\sin\theta = 6\sqrt{3}$ 。

- (1) 求曲线  $C_2$  的普通方程；
- (2) 设点  $P$  是曲线  $C_2$  上的动点，求点  $P$  到直线  $l$  距离  $d$  的最小值。

23. [选修 4—5：不等式选讲] (10 分)

已知函数  $f(x) = |x+t| + |x-2t|$ ， $t \in \mathbf{R}$

- (1) 若  $t = 1$ ，求不等式  $f(x) \leq 14 - x^2$  的解集。
- (2) 已知  $a + b = 4$ ，若对任意  $x \in \mathbf{R}$ ，都存在  $a > 0$ ， $b > 0$  使得  $f(x) = -\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ ，求实数  $t$  的取值范围。

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线

