台州市 2022学年第二学期 高一年级期末质量评估试题

数学参考答案

2023.07

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1~8 CBBA　　BBAD

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. ABD　　10. BC　　11.ACD　　12. BCD

三、填空题：本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分。

13. $\sqrt{2}$　　14.点 $A、C、B_1, D_1$ 均可　　15. $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$　　16. $\dfrac{7}{4}$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分为 10 分）

解：（I）$z^2=(2-\mathrm{i})^2=3-4\mathrm{i}$. ………………………………………… 5 分

（II）$2(2-\mathrm{i})^2+p(2-\mathrm{i})+q=0$，即 $6+2p+q-(p+8)\mathrm{i}=0$.

$\begin{cases}6+2p+q=0,\\ p+8=0,\end{cases}$ 得 $p=-8,q=10$. ……………………………………10 分

18.（本小题满分为 12 分）

解：（Ⅰ）若选①②：$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}$，

由①②，得 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{6}+|\vec{b}|^2}=|\vec{b}|$，故③成立………………6 分

若选①③：

由③得 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2$，$\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{b}^2$，得 $\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=0$．即 $|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=0$

由① $|\vec{a}|=\sqrt{3}|\vec{b}|$ 代入上式，得 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\pi}{6}$．故②成立…………………………6 分

若选②③：

由③得 $\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即 $|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=0$，由②得 $|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$，

得 $|\vec{a}|=\sqrt{3}|\vec{b}|$．故①成立. ……………………………………………………6 分

（Ⅱ）由题意，得 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\lambda\vec{b}\right)=0$，$\vec{a}^2+\left(1-\lambda\right)\vec{a}\cdot\vec{b}-\lambda\vec{b}^2=0$．又由①②，得

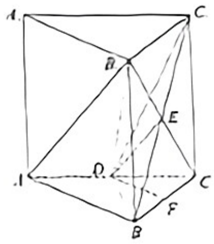
$$3\left|\vec{b}\right|^2+\left(1-\lambda\right)\sqrt{3}\left|\vec{b}\right|^2\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda\left|\vec{b}\right|^2=0，得 \lambda=\frac{9}{5}．$$ ……………………………12 分

19.（本小题满分为 12 分）

解：(Ⅰ) 连接 B_1C 交 BC_1 于点 E，连接 DE.因为 D,E 分别是 $AC、B_1C$ 的中点，DE 是 $\triangle CAB_1$ 的中位线，所以 $A_1B//DE$，又由 $AB_1\not\subset$ 平面 C_1DB，$DE\subset$ 平面 C_1DB．

所以 $AB_1//$ 平面 C_1DB．……………………………………………………………5 分

（Ⅱ）过点 D 作 DF 垂直 BC 交于点 F，则 $DF\perp$ 平面 B_1BCC_1，



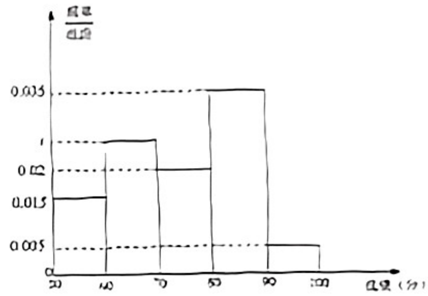
设 $BC=a$，则 $DF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$．

$$V_{B_1-DBC_1}=V_{D-B_1BC_1}=\frac{1}{3}S_{\Delta B_1BC_1}\cdot DF=\frac{1}{6}a\sqrt{4-a^2}\le\frac{1}{6}\frac{a^2+\left(4-a^2\right)}{2}=\frac{1}{3}．$$

当且仅当 $a=\sqrt{2}$ 时取等号.

所以三棱锥 B_1-DBC_1 的体积的最大值是 $\frac{1}{3}$．……………………………………12 分

20（本小题满分为 12 分）



解：(Ⅰ) 由表知得分在 $[60,70)$ 内的频率为 0.25，

所以 $t=\frac{0.25}{10}=0.025$．…………………3 分

设平均成绩的估计值为 $\bar{x}$，则

$\bar{x}=55\times0.15+65\times0.25+75\times0.2$

$+85\times0.35+95\times0.05=74$

所以这 100 名学生的平均成绩估计值为 74 分.……………………………………………6 分

（Ⅱ）每个学生成绩不低于 80 分的概率为 0.4．

3 名学生中恰有 2 人成绩不低于 80 分的概率 $P_1=3\times0.4^2\times0.6=0.288$；

3 名学生中恰有 3 人成绩不低于 80 分的概率 $P_2=0.4^3=0.064$

3 名学生中至少有 2 人成绩不低于 80 分的概率 $P=P_1+P_2=0.352$.…………12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：(Ⅰ)由余弦定理，得

$$b=\frac{2}{5}\frac{a^2\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-c^2\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a-c}，$$ ……………………………………2 分

$$b=\frac{1}{5}\frac{a\left(a^2+b^2-c^2\right)-c\left(b^2+c^2-a^2\right)}{b(a-c)}=\frac{1}{5}\frac{\left(a^3-c^3\right)+b^2(a-c)+ac(a-c)}{b(a-c)}$$

$$=\frac{1}{5}\frac{a^2+ac+c^2+b^2+ac}{b}$$

整理，得 $5b^2=(a+c)^2+b^2$，即 $4b^2=(a+c)^2$.

所以，$2b=a+c$. ……………………………………………………………………5 分

（Ⅱ）由 $2b=a+c$，

得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{2ac}=\frac{3}{8}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)-\frac{1}{4}$. ………………7 分

设 $\frac{a}{c}=t$，则 $\cos B=\frac{3}{8}\left(t+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{4}$.

因为 $2b=a+c$，且 $a\neq c$，由对称性，不妨设 $a>c$，则 $a>b>c$，$t>1$.

$\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以 $\cos A>0$，得 $b^2+c^2>a^2$，即 $\frac{(a+c)^2}{4}+c^2>a^2$，

即 $a+c>4(a-c)$，得 $\frac{a}{c}<\frac{5}{3}$. 所以，$1<t<\frac{5}{3}$.

由对勾函数单调性，知 $t+\frac{1}{t}\in\left(2,\frac{34}{15}\right)$. 得 $\cos B\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right)$. ……………11 分

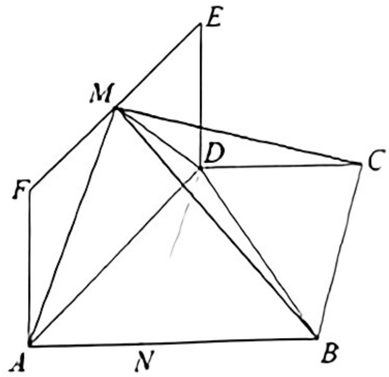
$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}\in\left(\frac{4}{5},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

所以，$\sin B$ 的取值范围为 $\left(\frac{4}{5},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ……………………………………………………12 分

22.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）(i) 证明：由题意，四边形 $ABCD$ 为直角梯形，所以 $BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{2}$

取 AB 的中点为 N，连接 DN，则 $DN//BC$，且 $DN=BC$，



所以 $AD=\sqrt{DN^2+AN^2}=\sqrt{2}$，又由 $AB=2$，

所以 $BD^2+AD^2=AB^2$，所以 $BD\perp AD$，

又平面 $ADM\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADM\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $BD\perp$ 平面 ADM. ……………………………………2 分

又 $AM\subset$ 平面 ADM，所以 $AM\perp BD$，

因为 $MD=MA=1$，$AD=\sqrt{2}$，所以 $AM\perp DM$，又 $DM\cap BD=D$，

所以 $AM\perp$ 平面 BDM. ……………………………………………………………4 分

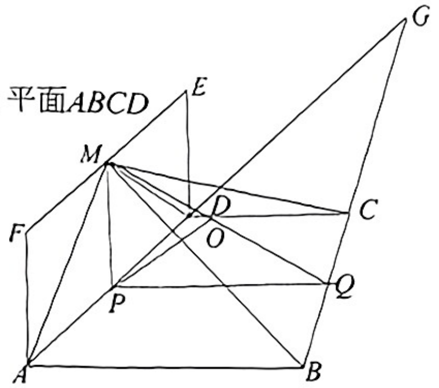
(ii) 解：取 AD 的中点为 P，BC 的中点为 Q，连接 MP，PQ，QM.

过P作PO垂直于QM，垂足为O，

因为$MP//AF$，由题意，$MP\perp$平面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$

所以$BC\perp PM$，又$BC\perp PQ$，$PQ\cap PM=P$

所以$BC\perp$平面PMQ.



同理，得$PO\perp$平面MBC

因为$|MP|=\dfrac{\sqrt{2}}{2},|PQ|=\dfrac{3}{2}$，$\angle MPQ=\dfrac{\pi}{2}$．所以$|PO|=\dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{11}}$ ……………6分

延长AD与BC交于点G，则D为AG的中点，G为直线AD与平面MBC的交点，
设点A到平面MBC的距离为d，直线与平面MBC所成的角为θ．则

$\dfrac{|PO|}{d}=\dfrac{|GP|}{|GA|}=\dfrac{3}{4}$，所以$d=\dfrac{4}{3}|PO|=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$，由$|AM|=1$，

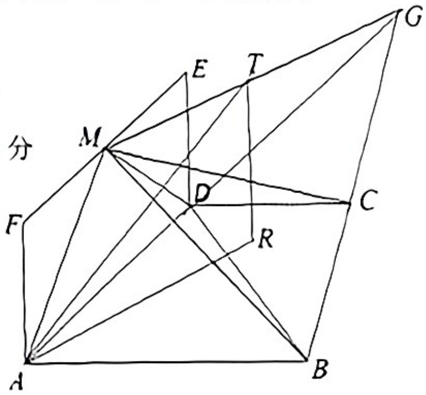
所以，$\sin\theta=\dfrac{d}{|AM|}=\dfrac{2\sqrt{22}}{11}$． ……………………………………………………8分

（Ⅱ）假设存在点M，使得$\alpha=\beta$，延长AD与BC交于点G，连MG，

则平面$AMD\cap$平面$MBC=MG$

设$AR\perp$平面MBC，垂足为R，连接RM，$\angle AMR$是直线AM与平面MBC所成角.

过点R作RT垂直于MG，垂足为T，则由三垂线定理，得$AT\perp MG$，$\angle ATR$是二面角$A-MG-B$的平面角.



所以$\sin\alpha=\dfrac{AR}{AM},\sin\beta=\dfrac{AR}{AT}$.由$\alpha=\beta$，得$AM=AT$，

所以M,T重合，由$AT\perp MG$，得$AM\perp MG$ ……………10分

设$|FM|=x(0\le x\le\sqrt{2})$，则

$|AM|^2=x^2+\dfrac{1}{2}$，$|GM|^2=\left(2\sqrt{2}-x\right)^2+\dfrac{1}{2}$

$x^2+\dfrac{1}{2}+\left(2\sqrt{2}-x\right)^2+\dfrac{1}{2}=8$，

C

$2x^2-4\sqrt{2}x+1=0$，解得$x=\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$或$x=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$（舍去）

所以存在点M，当$|FM|=\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，有$\alpha=\beta$成立.……………………………12分