

## 昆明市 2022~2023 学年高二期末质量检测

## 数 学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上，并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目，在规定的位罝贴好条形码。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复平面内，复数  $z$  所对应的点为  $(2,1)$ ，则  $zi =$

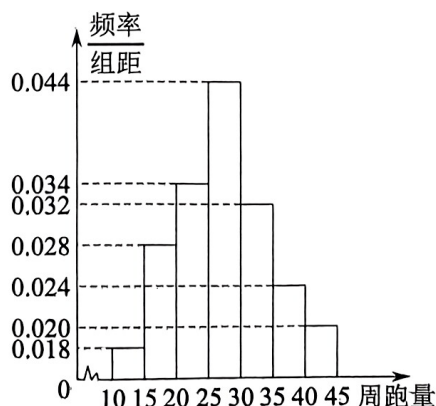
A.  $2+i$                       B.  $2+2i$                       C.  $-1+2i$                       D.  $-1-2i$

2. 已知集合  $A = \{1, 2, 4\}$ ，集合  $B = \{a, a+2\}$ ，若  $A \cap B = B$ ，则  $a =$

A. 0                      B.  $\frac{1}{2}$                       C. 1                      D. 2

3. 某校为调查学生跑步锻炼的情况，从该校 3000 名学生中随机抽取 300 名学生，并统计这 300 名学生平均每周的跑步量（简称“周跑量”，单位：km/周），得到如图所示的频率分布直方图。称周跑量不少于 35 km/周的学生为“跑步达人”，用频率分布直方图估计这 3000 名学生中“跑步达人”的人数为

A. 66  
B. 132  
C. 660  
D. 720



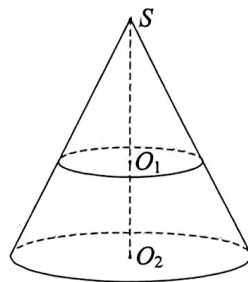
4. 大西洋鲑鱼每年都要逆流而上，洄游到产卵地产卵，科学家发现鲑鱼的游速  $v$ （单位：m/s）

与鲑鱼的耗氧量的单位数  $P$  的关系为  $v = \frac{1}{2} \log_3 \frac{P}{100}$ ，则鲑鱼静止时耗氧量的单位数为

- A. 1                      B. 100                      C. 200                      D. 300

5. 如图，圆锥  $SO_2$  被平行于底面的一个平面所截，截去一个上、下底面半径分别为 3 和 5，高为 4 的圆台  $O_1O_2$ ，则所得圆锥  $SO_1$  的体积为

- A.  $16\pi$   
B.  $18\pi$   
C.  $20\pi$   
D.  $24\pi$



6. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ )， $F_1$ ， $F_2$  分别是  $C$  的左，右焦点， $P$  为  $C$  上一点，

若线段  $PF_1$  的中点在  $y$  轴上， $\angle PF_1F_2 = \frac{\pi}{6}$ ，则  $C$  的离心率为

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$                       D.  $2 - \sqrt{3}$

7. 已知  $\sin(\frac{\pi}{6} - x) = \frac{1}{4}$ ，则  $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) =$

- A.  $-\frac{7}{8}$                       B.  $-\frac{1}{8}$                       C.  $\frac{1}{8}$                       D.  $\frac{7}{8}$

8. 已知关于  $x$  的不等式  $(a+1)x \geq \ln x + b$  恒成立，则  $ae^{b-1}$  的最小值为

- A. -1                      B.  $-\frac{1}{2}$                       C.  $-\frac{1}{4}$                       D.  $-\frac{1}{8}$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求的，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知抛物线  $E: y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ ， $A$  为  $E$  上一点，则下列命题或结论正确的是

- A. 若  $AF$  与  $x$  轴垂直，则  $|AF| = 2$                       B. 若点  $A$  的横坐标为 2，则  $|AF| = 3$   
C. 以  $|AF|$  为直径的圆与  $y$  轴相切                      D.  $|AF|$  的最小值为 2

10. 已知直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的所有顶点都在球  $O$  的球面上,  $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ ,  $BC = 3$ ,  $AA_1 = 2$ , 则下列结论正确的是

A. 球  $O$  的表面积为  $16\pi$

B.  $O$  到直线  $AA_1$  的距离为  $\sqrt{3}$

C.  $O$  到平面  $BCC_1B_1$  的距离为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D.  $O$  到平面  $ABB_1A_1$  的距离为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 已知甲口袋中装有 3 个红球, 1 个白球, 乙口袋中装有 2 个红球, 1 个白球, 这些球只有颜色不同. 先从甲口袋中随机取出 1 个球放入乙口袋, 再从乙口袋中随机取出 1 个球. 从甲口袋中取出的球是红球、白球分别为事件  $A_1$ 、 $A_2$ , 从乙口袋中取出的球是红球为事件  $B$ , 则下列结论正确的是

A.  $P(A_1) = \frac{3}{4}$

B.  $P(B|A_2) = \frac{1}{4}$

C.  $P(A_1B) = \frac{3}{4}$

D.  $P(B) = \frac{11}{16}$

12. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(3x+1)$  为奇函数,  $f(x+2)$  为偶函数, 当  $x \in [1, 2]$  时,  $f(x) = a + \log_2 x$ . 则下列结论正确的是

A.  $f(1) = 1$

B.  $f(7) = 0$

C.  $\sum_{k=1}^{2023} f(k) = 1$

D.  $\sum_{k=1}^{100} k f(k) = -100$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量  $a$ ,  $b$  满足  $|a| = 2$ ,  $|a+b| = |a-b| = 3$ , 则  $|b| =$ \_\_\_\_\_.

14. 已知圆  $O: x^2 + y^2 = 4$ , 过点  $(1, 1)$  的直线  $l$  与圆  $O$  交于  $A$ ,  $B$  两点, 则  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  的一个可能的值为\_\_\_\_\_.

15. 《周髀算经》是中国十部古算经之一, 其中记载有: 阴阳之数, 日月之法, 十九岁为一章, 四章为一部, 二十部为一遂……. 若 32 个人的年龄 (都为整数) 依次成等差数列, 他们的年龄之和恰好为 “一遂”, 其中年龄最小者不超过 30 岁, 则年龄最大者为\_\_\_\_\_岁.

16. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$  ( $\omega > 0$ ),  $x = \frac{\pi}{4}$  是  $f(x)$  图象的一条对称轴,  $f(x)$  在区间  $(0, \frac{\pi}{4})$  上单调, 若  $f(x)$  在区间  $(-m, m)$  上有且仅有 2 个极值点, 则  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的首项为 1，记其前  $n$  项和为  $S_n$ ， $S_n = \frac{a_n(n+1)}{2}$ 。

(1) 求  $a_n$ ；

(2) 设  $b_n = 2^{a_n}$ ，求  $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$ 。

18. (12 分)

$\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边长分别为  $a, b, c$ ， $\sin^2 B - \sin^2 C = \sin A(\sin A - \sin C)$ 。

(1) 求  $B$ ；

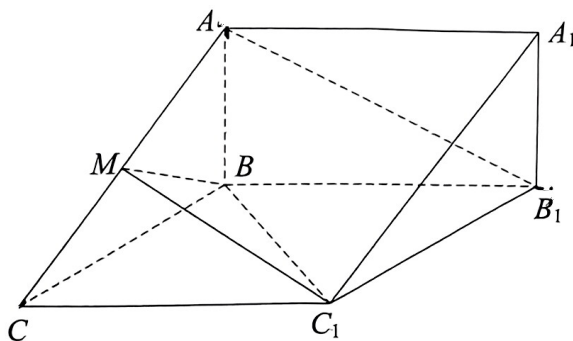
(2) 设  $BD$  是  $AC$  边上的高，且  $BD = 2$ ，求  $\triangle ABC$  面积的最小值。

19. (12 分)

如图，三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $M$  是  $AC$  的中点， $AB \perp$  平面  $BCC_1B_1$ ， $AC \perp BC_1$ 。

(1) 求证： $BC_1 \perp BC$ ；

(2) 若  $AB = BC_1 = \frac{1}{2}BC$ ，求平面  $MBC_1$  与平面  $ACC_1A_1$  夹角的余弦值。



20. (12 分)

已知函数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 在  $x=1$  处取得极值 0.

(1) 求  $a, b$ ;

(2) 若过点  $(1, m)$  存在三条直线与曲线  $y = f(x)$  相切, 求实数  $m$  的取值范围.

21. (12 分)

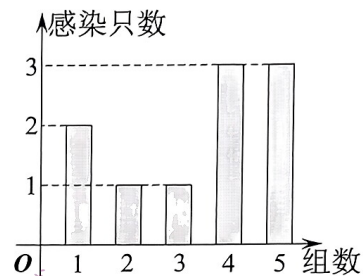
已知双曲线  $M: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 过点  $(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$ , 一条渐近线方程为  $x - 2y = 0$ .

(1) 求  $M$  的方程;

(2) 过  $M$  的右焦点的直线  $l$  与  $M$  的右支交于  $P, Q$  两点,  $T(-3, 0)$ , 若  $\triangle TPQ$  的外接圆圆心  $E$  在  $y$  轴上, 求直线  $l$  的方程.

22. (12 分)

某研究所研究某一型号疫苗的有效性，研究人员随机选取 50 只小白鼠注射疫苗，并将白鼠分成 5 组，每组 10 只，观察每组被感染的白鼠数. 现用随机变量  $X_i$  ( $i=1,2,\dots,5$ ) 表示第  $i$  组被感染的白鼠数，并将随机变量  $X_i$  的观测值  $x_i$  ( $i=1,2,\dots,5$ ) 绘制成如图所示的频数分布条形图. 若接种疫苗后每只白鼠被感染的概率为  $p$  ( $p \in (0,1)$ )，假设每只白鼠是否被感染是相互独立的. 记  $A_i$  为事件 “ $X_i = x_i$  ( $i=1,2,\dots,5$ )”.



(1) 写出  $P(A_1)$  (用  $p$  表示，组合数不必计算);

(2) 研究团队发现概率  $p$  与参数  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) 之间的关系为  $p = \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{5}{6}\theta + \frac{19}{45}$ . 在统计学中，若参数  $\theta = \theta_0$  时的  $p$  值使得概率  $P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5)$  最大，称  $\theta_0$  是  $\theta$  的最大似然估计，求  $\theta_0$ .