

2023 年高中毕业年级第一次质量预测

文科数学 评分参考

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.A 2.C 3.A 4. B 5.C 6. B 7.D 8.C 9. C 10.D 11.A 12.B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{\pi}{3}$; 14. $(-\infty, 0)$; 15. 2π ; 16. ②④.

三、解答题：共 70 分。

17. 解析：(I)由表格中的数据， $182.4 > 79.2$ ，.....1 分

$$\therefore \frac{182.4}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} > \frac{79.2}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2}, 1 - \frac{182.4}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} < 1 - \frac{79.2}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$\therefore$ 模型①的相关指数 R_1^2 小于模型②的相关指数 R_2^2 ，.....5 分

$\therefore$ 回归模型②的拟合效果更好.....6 分

(II)当 $x=17$ 亿时，科技升级直接收益的预测值为：

$$\hat{y} = 21.3\sqrt{x} - 14.4 \approx 72.93(\text{亿元}) \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 解析：(I)在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AD \perp AB$ ， $AB \parallel DC$ ，

由 $AD = DC = AP = 2$ ， $AB = 1$ ，得 $PB = BC = \sqrt{5}$ ，.....2 分

又点 E 为棱 PC 的中点， $BE \perp PC$ ，.....3 分

由 $AD = DC = AP = 2$ ， $AC = 2\sqrt{2}$ ， $PC = 2\sqrt{3}$ ，得 $AE = \sqrt{3}$ ， $BE = \sqrt{2}$ ， $AB = 1$ ，.....4 分

由 $AE^2 = BE^2 + AB^2$ ，得 $BE \perp AB$ ，又 $AB \parallel CD$ ， $CD \cap CP = C$ ，

故 $BE \perp$ 面 PCD ，又 $BE \subset$ 面 PBC ，所以平面 $PBC \perp$ 平面 PCD6 分

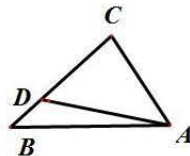
(II)点 E 为棱 PC 的中点，

$$V_{E-ABCD} = \frac{1}{2} V_{P-ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (1+2) \cdot 2 \cdot 2 = 1 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解析：(I)因为 $b+c = a \cos B + \sqrt{3}a \sin B$ ，

所以 $\sin B + \sin C = \sin A \cos B + \sqrt{3} \sin A \sin B$ ，.....2 分

又因为 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ，



所以 $\sin B + \cos A \sin B = \sqrt{3} \sin A \sin B$,4 分

而 $B \in (0, \pi), \sin B \neq 0$,

所以 $\sqrt{3} \sin A - \cos A = 1$, 即 $\sin(A - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$,5 分

又因为 $0 < A < \pi$, 所以 $-\frac{\pi}{6} < A - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$, 故 $A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, 解得 $A = \frac{\pi}{3}$6 分

(II) 因为 $CD = 2DB$, $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

由 $\overrightarrow{AD}^2 = (\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC})^2$, 所以 $4 = \frac{1}{9}b^2 + \frac{4}{9}c^2 + \frac{2}{9}bc$,8 分

$4 = \frac{1}{9}b^2 + \frac{4}{9}c^2 + \frac{2}{9}bc \geq \frac{4}{9}bc + \frac{2}{9}bc = \frac{2}{3}bc$,

解得 $bc \leq 6$, 当且仅当 $b = 2c = 2\sqrt{3}$ 时取“=”,10 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin BAC = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

当且仅当 $b = 2c = 2\sqrt{3}$ 时, $\triangle ABC$ 的面积有最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$12 分

20. 解析: (I) $f(x) \leq x + c$ 等价于 $\ln x - x \leq c - 1$2 分

设 $h(x) = \ln x - x$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内单调递增;4 分

当 $x > 1$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内单调递减.5 分

故 $[h(x)]_{\max} = h(1) = -1$, 所以 $c - 1 \geq -1$, 即 $c \geq 0$, 所以 c 的取值范围是 $[0, +\infty)$6 分

(II) $g(x) = \frac{\ln x + 1 - (\ln a + 1)}{x - a} = \frac{(\ln x - \ln a)}{x - a} (x > 0 \text{ 且 } x \neq a)$,

因此 $g'(x) = \frac{(x - a - x \ln x + x \ln a)}{x(x - a)^2}$, 设 $m(x) = (x - a - x \ln x + x \ln a)$,

则有 $m'(x) = (\ln a - \ln x)$,8 分

当 $x > a$ 时, $\ln x > \ln a$, 所以 $m'(x) < 0$, $m(x)$ 单调递减, 因此有 $m(x) < m(a) = 0$,

即 $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 单调递减;10 分

当 $0 < x < a$ 时, $\ln x < \ln a$, 所以 $m'(x) > 0$, $m(x)$ 单调递增, 因此有 $m(x) < m(a) = 0$,

即 $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 单调递减,

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0, a)$ 和 $(a, +\infty)$ 上单调递减, 没有递增区间.12 分

21. 解析: (I) 由题意得 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $a = 2b$,2 分

不妨设直线 l_1 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $\frac{x}{2b} + \frac{y}{b} = 1$, 即 $x + 2y - 2b = 0$,3 分

所以原点 O 到直线 l_1 的距离为 $d = \frac{2b}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

解得 $b = 1$, 所以 $a = 2$, 故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$5 分

(II) 设 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 设 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB} (\lambda \neq -1)$, $\frac{x_1 + \lambda x_2}{(1 + \lambda)} = 0$, $\frac{y_1 + \lambda y_2}{(1 + \lambda)} = 2$,

于是: $\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1, \\ \frac{x_2^2}{4} + y_2^2 = 1, \end{cases}$ 故 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1, \\ \lambda^2 \frac{x_2^2}{4} + \lambda^2 y_2^2 = \lambda^2. \end{cases}$ 7 分

得, $\frac{(x_1 - \lambda x_2)(x_1 + \lambda x_2)}{4} + (y_1 - \lambda y_2)(y_1 + \lambda y_2) = 1 - \lambda^2$,

$\frac{(x_1 - \lambda x_2)(x_1 + \lambda x_2)}{4(1 + \lambda)} + \frac{(y_1 - \lambda y_2)(y_1 + \lambda y_2)}{1 + \lambda} = 1 - \lambda$ 9 分

将点 P 坐标代入, $(y_1 - \lambda y_2) = \frac{1 - \lambda}{2}$ 又 $(y_1 + \lambda y_2) = 2(1 + \lambda)$,

得 $y_1 = \frac{3\lambda + 5}{4}$, 又 $y_1 \in [-1, 1]$, 故 $\lambda \in [-\frac{7}{3}, -1)$ 上, 且 $\lambda \neq -1$11 分

所以 $\frac{|PA|}{|PB|} = |\lambda| \in [\frac{1}{3}, 1) \cup (1, 3]$12 分

(二) 全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》选考题 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所写的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

(1) 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos \alpha}, \\ y = \frac{\sqrt{3} \sin \alpha}{\cos \alpha}, \end{cases} (\alpha \text{ 为参数}, \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}),$

所以 $x^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\frac{y^2}{3} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$, 所以 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

即曲线 C 的普通方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. (3 分)

直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 1$, 则 $\rho(\cos \theta \cos \frac{\pi}{3} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{3}) = 1$,

转换为直角坐标方程为 $x - \sqrt{3}y - 2 = 0$. (5 分)

(2) 直线 l 过点 $P(2,0)$, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=\frac{1}{2}t, \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

令点 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 ,

由 $\begin{cases} x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=\frac{1}{2}t \end{cases}$ 代入 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 得 $2t^2 + 6\sqrt{3}t + 9 = 0$,

则 $t_1 + t_2 = -3\sqrt{3}$, $t_1 t_2 = \frac{9}{2}$, (8分)

故 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{|t_1| + |t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{|t_1 + t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. (10分)

23. (1) ①当 $x \leq -1$ 时, $1 - 3x \leq 5 \Rightarrow x \geq -\frac{4}{3}$, 解得 $-\frac{4}{3} \leq x \leq -1$;

②当 $-1 < x \leq 3$ 时, $x + 5 \leq 5 \Rightarrow x \leq 0$, 解得 $-1 < x \leq 0$;

③当 $x > 3$ 时, $3x - 1 \leq 5 \Rightarrow x \leq 2$, 无解,

综上: 不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{4}{3} \leq x \leq 0\right\}$. (5分)

(2) 因为 $f(x) = 2|x+1| + |x-3| = |x+1| + |x-3| + |x+1| \geq |x+1-x+3| + 0 = 4$,

当且仅当 $x = -1$ 时等号成立.

所以 $m = 4$, 即 $a + b + c = m = 4$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} &= \frac{1}{8} [(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{b+c}{a+b} + \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{b+c} + \frac{a+b}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \right) \\ &\geq \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \left(2\sqrt{\frac{b+c}{a+b} \cdot \frac{a+b}{b+c}} + 2\sqrt{\frac{b+c}{c+a} \cdot \frac{c+a}{b+c}} + 2\sqrt{\frac{a+b}{c+a} \cdot \frac{c+a}{a+b}} \right) = \frac{9}{8}, \end{aligned}$$

当且仅当 $a+b=b+c=c+a$, 即 $a=b=c=\frac{4}{3}$ 时, 等号成立. (10分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线