2021年湖北省新高考联考协作体高三起点考试

数学试卷

命题学校：孝感高级中学　命题人：向艳 程世全 李志红 明亮　审题学校：襄阳市一中

考试时间：2021年9月6日 15:00—17:00　　试卷满分：150分

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 命题"$\exists x_0\geqslant 0, 2^{x_0}+x_0-a\leqslant 0$"的否定是

A. $\forall x\leqslant 0, 2^x+x-a\leqslant 0$　　B. $\forall x\geqslant 0, 2^x+x-a>0$

C. $\exists x_0\leqslant 0, 2^{x_0}+x_0-a>0$　　D. $\exists x_0\geqslant 0, 2^x+x_0-a>0$

2. 设集合 $M=\{x\mid x^2+ax+6=0\}$，$N=\{-3,-2,-1\}$，若 $M\subseteq N$，则 a 的取值范围是

A. $\{a\mid a=5$ 或 $a=7\}$　　B. $\{a\mid a=5$ 或 $-2\sqrt{6}<a<2\sqrt{6}\}$

C. $\{a\mid -2\sqrt{6}<a<2\sqrt{6}\}$　　D. $\{a\mid a=7$ 或 $-2\sqrt{6}<a<2\sqrt{6}\}$

3. 已知 $a>0$，$b>0$ 且 $a+b=1$，若不等式 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>m$ 恒成立，$m\in N_+$，则 m 的最大值为

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

4. 已知定义在R上的偶函数 $f(x)$ 和奇函数 $g(x)$ 满足 $f(x)+g(x)=a^{3x}-a^{-3x}+1$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），则 $f(1)=$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

5. 已知 $\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$-\frac{7\pi}{3}<\alpha<-\frac{4\pi}{3}$，则 $\cos(\frac{7\pi}{12}-\frac{\alpha}{2})=$

A. $-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$　　C. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

6. 若 $a=(2)^{[illegible]}$，$b=3^{[illegible]}$，$c=(\frac{1}{2})^{[illegible]}$，$d=(\frac{1}{3})^{[illegible]}$，则 a、b、c、d 的大小关系是

A. $a>b>c>d$　　B. $b>a>d>c$　　C. $b>a>c>d$　　D. $a>b>d>c$

7. 已知在三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA=SB=SC=AB=2$，$AC\perp BC$，则该三棱锥外接球的体积为

A. $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$　　B. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$　　C. $\frac{32\pi}{3}$　　D. $\frac{16\pi}{3}$

8. 已知 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2ax$，$g(x)=3a^2\ln x-b$，其中 $a>0$，设两曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 有公共点，且在该点的切线相同，则

A. 曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 有两条这样的公共切线　　B. $b=\frac{3a^2}{2}+3a^2\ln a$

C. 当 $a=\frac{3}{e}$ 时，b 取最小值　　D. b 的最小值为 $-\frac{1}{6e^2}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每个小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的5分，部分选对得2分，有选错的得0分.

9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前4项的和为 a_1+14，且 a_2，a_3+1，a_4 成等差数列，则 q 的值可能为

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 3

10. 已知 $\vec{a}=(3,-1)$，$\vec{b}=(1,-2)$，则下列说法正确的有

A. $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $\sqrt{5}$　　B. 与 $\vec{a}$ 同向的单位向量是 $(\frac{3\sqrt{10}}{10},-\frac{\sqrt{10}}{10})$

C. $<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\pi}{4}$　　D. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行

11. 已知函数 $f(x)=[illegible]\sin(2x+\varphi)(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{12},0)$ 对称，则

A. $f(x)$ 的最小正周期是 π

B. 函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增

C. 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $a(a>0)$ 个单位长度得到的图象对应的函数是奇函数，则 a 的最小值是 $\frac{5\pi}{12}$

D. 若 $x_1,x_2\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$，$x_1\neq x_2$ 时，$f(x_1)=f(x_2)$ 成立，则 $|x_1-x_2|$ 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$

12. 设函数 $f(x)=(1+\frac{1}{m})\ln x-x+\frac{1}{mx}(m\neq 0)$，则

A. 当 $m<0$ 时，$f(x)<-1$

B. 当 $m<0$ 时，$f(x)$ 有两个极值点

C. 当 $0<m<1$ 时，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上不单调

D. 当 $m>1$ 时，存在唯一实数 m 使得函数 $g(x)=f(x)+2$ 恰有两个零点

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.请将答案填在答题卡对应题号的位置上.答错位置、书写不清、模棱两可均不得分.

13. 设 i 是虚数单位，若复数 $2-\frac{a}{2-i}(a\in R)$ 是纯虚数，则 $a=$ ________.

14. 已知 $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1}{3}$，则 $\frac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=$ ________.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=2$，其前 n 项和为 S_n，若 $S_{n+1}=2S_n+1$，则 $a_7=$ ________.

16. 函数 $f(x)=(x^2-3)e^x$，关于 x 的方程 $f^2(x)-mf(x)+1=0$ 恰有四个不同实数根，则实数 m 的取值范围为________.

四、解答题：本大题6小题，共70分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分10分）

设函数 $f(x)=\sin x, x\in R$.

(1)已知 $\theta\in[0,\frac{3\pi}{2})$，函数 $f(x+\theta)$ 是偶函数，求 θ 的值；

(2)求函数 $y=[f(x+\frac{\pi}{12})]^2+[f(x+\frac{\pi}{4})]^2-1, x\in[\frac{\pi}{12},\frac{2\pi}{3}]$ 的值域.

18.（本小题满分12分）

已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，其公差不为0，$a_1=5$，a_2 是 a_1 与 a_5 的等比中项.

(1)求 $\{a_n\}$ 通项公式；

(2)记 $b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项之和 T_n.

19.（本小题满分12分）

在锐角△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\frac{\sin B-\sin A}{b-c}=\frac{\sin C}{a+b}$.

(1)求角 A 的大小；

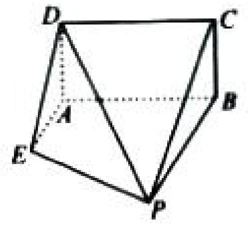
(2)当 $a=\sqrt{3}$ 时，求 $\frac{b+c}{2}$ 的取值范围.

20.（本小题满分12分）

如图，已知矩形 $ABCD$ 所在平面垂直于直角梯形 $ABPE$ 所在平面，且 $AB=BP=2$，$AD=AE=1$，$AE\perp AB$，且 $AE\parallel BP$.

(1)设点 M 为棱 PD 中点，求证：$EM\parallel$ 平面 $ABCD$；

(2)线段 PD 上是否存在一点 N，使得直线 BN 与平面 PCD 所成角的正弦值等于 $\frac{2\sqrt{105}}{35}$？若存在，试求出线段 PN 的长度；若不存在，请说明理由.



21.（本小题满分12分）

北京时间2021年7月23日19:00，东京奥运会迎来了开幕式，各国代表队精彩入场，运动员为参加这次盛大的体育赛事积极做准备工作，当地某旅游用品商店经销此次奥运会纪念品，每件产品的成本为5元，并且每件产品需向税务部门上交 $a+5$ 元 $(5\leqslant a\leqslant 8)$ 的税收，预计当每件产品的售价为 x 元 $(13\leqslant x\leqslant 17)$ 时，一年的销售量为 $(18-x)^2$ 万件.

(1)求该商店一年的利润 L（万元）与每件产品的售价 x 的函数关系式；

(2)当每件产品的售价为多少元时，该商店一年的利润 L 最大，并求出 L 的最大值 $Q(a)$.

22.（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=(x+1)e^x+mx$，$g(x)=3n\cos x+3(m,n\in R)$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的单调性；

(2)当 $n=-1$ 时，不等式 $f(x)+g(x)\geqslant \frac{1}{4}mx+1$ 对 $x\geqslant 0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

2021 年湖北省新高考联考协作体高三起点考试

高三数学试卷参考答案

一、选择题

1--8：BBAC,DCAD

二、选择题

9AC　10ABC　11AC　12ACD

三、填空题

13 $\underline{5}$　　**14** $\underline{3}$　　**15** $\underline{96}$　　**16** $\underline{\left(-2e-\frac{1}{2e},-2\right)\cup\left(\frac{6}{e^3}+\frac{e^3}{6},+\infty\right)}$

四、解答题

17.解：（1）由 $f(x)=\sin x$**，得** $f(x+\theta)=\sin(x+\theta)$**，**

$\because f(x+\theta)$**为偶函数，** $\therefore \theta=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$**，**

$\because \theta\in[0,\frac{3\pi}{2})$**，** $\therefore \theta=\frac{\pi}{2}$　　**5 分**

（2） $y=[f(x+\frac{\pi}{12})]^2+[f(x+\frac{\pi}{4})]^2-1$

$=\sin^2(x+\frac{\pi}{12})+\sin^2(x+\frac{\pi}{4})-1$

$=\frac{1-\cos(2x+\frac{\pi}{6})}{2}+\frac{1-\cos(2x+\frac{\pi}{2})}{2}-1$

$=1-\frac{1}{2}(\cos 2x\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{6}-\sin 2x)-1$

$=\frac{3}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6})$**，**　　**8 分**

$\because x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right]$**，** $\therefore \sin(2x-\frac{\pi}{6})\in[-\frac{1}{2},1]$**，**

$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6})\in[-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}]$**，**

$\therefore$**函数** $y=[f(x+\frac{\pi}{12})]^2+[f(x+\frac{\pi}{4})]^2-1$ **的值域为：** $[-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}]$**.**　　**10 分**

18.解：（1）设数列 $\{a_n\}$ **的公差为** d **,由已知得：** $\begin{cases}a_2^2=a_1\cdot a_5\\ a_3=a_1+2d\end{cases}$ **即** $\begin{cases}(a_1+d)^2=a_1\cdot(a_1+4d)\\ a_1+2d=5\end{cases}$

$\therefore \begin{cases} d=2 \\ a_1=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} d=0 \\ a_1=5 \end{cases}$ （舍）$\therefore a_n = 2n-1$　　5 分

（2）$\because b_n = \dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{4n-1} - \dfrac{1}{4n+3})$　　7 分

$\therefore T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$

$= \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{11} + \ldots + \dfrac{1}{4n-1} - \dfrac{1}{4n+3}\right)$

$= \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4n+3}) = \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{16n+12}$

$= \dfrac{n}{12n+9}$　　12 分

19.解：（1）由 $\dfrac{\sin B - \sin A}{b-c} = \dfrac{\sin C}{a+b}$ **及正弦定理得：** $(b-a)(b+a) = (b-c)c$，　　2 分

所以 $a^2 = b^2 + c^2 - bc$，　　**所以，** $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{1}{2}$，

所以，由 $A \in (0,\pi)$，**可得：** $A = \dfrac{\pi}{3}$．　　5 分

（2）$a = \sqrt{3}$，$A = \dfrac{\pi}{3}$，　　**所以：** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = 2$，

所以： $\dfrac{b+c}{2} = (\sin B + \sin C) = \sin B + \sin(\dfrac{2\pi}{3} - B) = \sqrt{3}\cos(B - \dfrac{\pi}{3})$，　　8 分

因为： ΔABC **为锐角三角形，** B **的范围为** $(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2})$，

则 $B - \dfrac{\pi}{3} \in (-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6})$，

$\therefore \cos(B - \dfrac{\pi}{3})$ **的取值范围是** $(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1]$，

$\therefore \dfrac{b+c}{2} \in (\dfrac{3}{2}, \sqrt{3}]$．　　12 分

20.解：证明：（Ⅰ）∵平面 $ABCD$⊥平面 $ABEP$，平面 $ABCD$∩平面 $ABEP$=AB，BP⊥AB，

∴BP⊥平面 $ABCD$，又 AB⊥BC，

∴直线 BA，BP，BC 两两垂直，

以 B 为原点，分别以 BA，BP，BC 为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系．

则 P（0，2，0），B（0，0，0），D（2，0，1），E（2，1，0），C（0，0，1），∴M（1，1，$\dfrac{1}{2}$），

∴ $\overrightarrow{EM}$ =（-1，0，$\dfrac{1}{2}$），$\overrightarrow{BP}$ =（0，2，0）．

∵BP⊥平面 $ABCD$，∴ $\overrightarrow{BP}$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量，

$\because \overline{EM}\cdot\overline{BP}=(-1)\times 0+0\times 2+\frac{1}{2}\times 0=0$，

$\therefore \overline{EM}\perp\overline{BP}$．又 $EM\not\subset$ 平面 $ABCD$，

∴EM//平面 $ABCD$． 5分

（Ⅱ）解：$\because \overline{PD}=$（2，－2，1），$\overline{CD}=$（2，0，0），

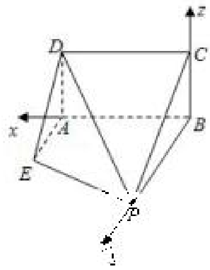
设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=$（x，y，z），则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overline{CD}=0\\ \vec{n}\cdot\overline{PD}=0\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}2x=0\\ 2x-2y+z=0\end{cases}$．令 $y=1$，得 $\vec{n}=$（0，1，2）． 7分

假设线段 PD 上存在一点 N，使得直线 BN 与平面 PCD 所成角α的正弦值等于 $\frac{2\sqrt{105}}{35}$．

设 $\overline{PN}=\lambda\overline{PD}=$（2λ，－2λ，λ）（0≤λ≤1），∴ $\overline{BN}=\overline{BP}+\overline{PN}=$（2λ，2－2λ，λ）．

$\therefore \cos\left\langle\overline{BN},\vec{n}\right\rangle=\frac{\overline{BN}\cdot\vec{n}}{\left|\overline{BN}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{9\lambda^2-8\lambda+4}}=\frac{2\sqrt{105}}{35}$． 9分



∴$9\lambda^2-8\lambda+\frac{5}{3}=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\lambda=\frac{5}{9}$．

∴线段 PD 上存在两个点 N 使当 $PN=1$或$\frac{5}{3}$时，

直线 BN 与平面 PCD 所成角的正弦值等于 $\frac{2\sqrt{105}}{35}$． 12分

21.解：(Ⅰ)商店一年的利润L(万元)与售价x的函数关系式为：$L=(x-10-a)(18-x)^2$，$x\in[13,\ 17]$．
（无定义域扣1分） 5分

（Ⅱ）$L=(x-10-a)(18-x)^2$

$L'(x)=(18-x)(38+2a-3x)$． 7分

令 $L'=0$ 得 $x=\frac{38+2a}{3}$ 或 $x=18$．

$\because 5\le a\le 8$，$\therefore 16\le\frac{38+2a}{3}\le 18$．

所以（1）当$16\le\frac{38+2a}{3}<17$，即$5\le a<6.5$时，

当$x\in\left[13,\frac{38+2a}{3}\right]$时，$L'(x)\ge 0$，$L(x)$ 递增

当$x\in\left[\frac{38+2a}{3},17\right]$时，$L'(x)\le 0$，$L(x)$ 递减 $L_{max}=L(\frac{38+2a}{3})=\frac{4}{27}(8-2)^3$． 9分

（2）当$17\le\frac{38+2a}{3}\le 18$ 即 $6.5\le a\le 8$ 时 $L'(x)\ge 0$，$L(x)$ 在$[13,17]$递增

$L_{max}=L(17)=7-a$，

所以$Q(a)=\begin{cases}\dfrac{4}{27}(8-a)^3, & 5\le a<6.5\\ 7-a\quad, & 6.5\le a\le 8\end{cases}$.　　　　11 分

答：若$5\le a<6.5$，则当每件售价为$\dfrac{38+2a}{3}$元时，商店一年的利润 L 最大，最大值$Q(a)=\dfrac{4}{27}(8-a)^3$ (万元)；若$6.5\le a\le 8$，则当每件售价为17 元时，商店一年的利润 L 最大，最大值$Q(a)=7-a$ (万元).12 分

22.解：(1) $f(x)=(x+1)e^x+mx+3$，$f'(x)=(x+2)e^x+m$，令$g(x)=(x+2)e^x+m$，

由$g'(x)=(x+3)e^x$，当$x<-3$时，$g'(x)<0$；当$x>-3$时，$g'(x)>0$，

所以$f'(x)$在$(-\infty,-3)$上单调递减，在$(-3,+\infty)$上单调递增；　　　　5 分

(2) 当$n=-1$时，不等式$f(x)+g(x)=(x+1)e^x+mx-3\cos x+3\ge\dfrac{1}{4}mx+1$对$x\ge 0$恒成立，

等价于$4(x+1)e^x+3mx-12\cos x+8\ge 0$对$x\ge 0$恒成立，

令$q(x)=4(x+1)e^x+3mx-12\cos x+8, x\ge 0$，则$q'(x)=4(x+2)e^x+3m+12\sin x$，　　7 分

$q(0)=0$，$q'(0)=8+3m$，令$h(x)=q'(x)=4(x+2)e^x+3m+12\sin x, x\ge 0$，

则$h'(x)=4(x+3)e^x+12\cos x=4xe^x+12(e^x+\cos x)>0$对$x\ge 0$恒成立，从而有$q'(x)$在$[0,+\infty)$上单增，

①当$m\ge-\dfrac{8}{3}$时，$q'(x)\ge q'(0)\ge 0$，$q(x)$在$[0,+\infty)$上单增，

$q(x)\ge q(0)=0$，即$4(x+1)e^x+3mx-12\cos x+8\ge 0$对$x\ge 0$恒成立，　　　　9 分

②当$m<-\dfrac{8}{3}$时，$q'(0)=8+3m<0$，

$$q'(1-\frac{3}{4}m)=4(3-\frac{3}{4}m)e^{1-\frac{3}{4}m}+3m+12\sin(1-\frac{3}{4}m)>12-3m+3m+12\sin(1-\frac{3}{4}m)$$

$$=12+12\sin(1-\frac{3}{4}m)>0$$

$\exists x_0\in(0,1-\dfrac{3}{4}m)$，使得$q'(x_0)=0$，当$0<x<x_0$时，$q'(x)<0$，$q(x)$在$(0,x_0)$上递减，

当$0<x\le x_0$时，$q(x)<q(0)=0$，故$4(x+1)e^x+3mx-12\cos x+8\ge 0$不成立，

综上，m的取值范围是$m\ge-\dfrac{8}{3}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。