2022年浙江省普通高中强基联盟统测
高三年级数学试题

参考公式：

如果事件 A,B 互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A,B 相互独立，那么

$P(AB)=P(A)P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$

台体的体积公式

$V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h$

其中 S_1,S_2 分别表示台体的上、下底面积，h 表示台体的高

柱体的体积公式

$V=Sh$

其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高

锥体的体积公式

$V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

第Ⅰ卷(选择题，共40分)

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

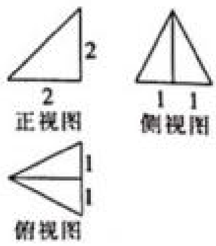
1. 已知集合 $M=\{y|y=-|2x|,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y=(\frac{1}{7})^x,x\in\mathbf{R}\}$，则（ ▲ ）

A. $M=N$　　B. $N\subseteq M$　　C. $M=\complement_{\mathbf{R}}N$　　D. $\complement_{\mathbf{R}}N\subsetneqq M$

2. 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 的离心率等于（ ▲ ）

A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. 3　　D. $\frac{3}{2}$

3. 某几何体的三视图如右图所示，则这个几何体的体积为（ ▲ ）



A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

4. 已知平面 α,β，直线 m，$\alpha\perp\beta$，则“$m/\!/\alpha$”是“$m\perp\beta$”的（ ▲ ）

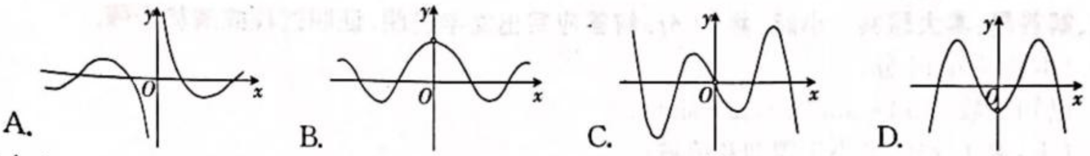
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+3y-3\geqslant0,\\2x-y-3\leqslant0,\\x-y+1\geqslant0,\end{cases}$ 则 $\frac{x}{y}$ 的最大值为（ ▲ ）

A. $\frac{5}{4}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. 4　　D. 5

6. 函数 $y=\sin 2x\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}$ 的部分图象大致为(▲)



7. 在△ABC 中，D 为边 BC 上一点，$AD=6$，$BD=3$，$\angle ABC=45°$，则 $\sin\angle ADC$ 的值为(▲)

A. $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{1+\sqrt{7}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

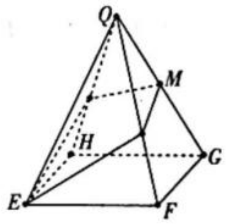
8. 已知函数 $p(x)=x-\frac{1}{x}$，若函数 $y=\begin{cases}ax\cdot p(x)+2x-2+\ln x, x>0,\\ p(x), x<0\end{cases}$ 恰有两个零点，则(▲)

A. $a\leqslant 1$　　B. $a\leqslant 0$ 或 $a=1$　　C. $a\geqslant -\frac{3}{2}$　　D. $a\geqslant 0$ 或 $a=-\frac{3}{2}$

9. 有 5 个人去并排的 5 个不同场馆锻炼，假定每人可以选择去任意一个场馆，则恰有 2 个场馆无人选择，且这 2 个场馆不相邻的选择方式共有(▲)

A. 800 种　　B. 900 种　　C. 1200 种　　D. 1500 种

10. 如图，在四棱锥 $Q-EFGH$ 中，底面是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形，$QE=QF=QG=QH=4$，M 为 QG 的中点. 过 EM 作截面将此四棱锥分成上、下两部分，记上、下两部分的体积分别为 V_1，V_2，则 $\frac{V_1}{V_2}$ 的最小值为(▲)



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

第Ⅱ卷(非选择题，共 110 分)

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分.

11. 已知 i 为虚数单位，且 $z(3+i)=1-i$，则 z 的虚部是__▲__，$|z|=$__▲__.

12. 已知随机变量 X 的分布列如下：

X	0	1	2
P	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$

则当 $p=\frac{1}{3}$ 时，$E(X)=$__▲__；当 $0<p<1$ 时，$D(X)$ 的最大值为__▲__.

13. 已知 $(x-2)(x+m)^5=a_6x^6+a_5x^5+\cdots+a_1x+a_0$，m 为常数，若 $a_5=-7$，则 $m=$__▲__，$a_6+a_5+\cdots+a_1=$__▲__.

14. 若正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$，且对任意的正整数 n，有 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+n+2$，则 $a_4=$__▲__，$a_{2022}=$__▲__.

15. 已知实数 a，b 满足 $a^4-\sqrt{2}b^2+2\leqslant 0$，则 $\frac{a^2+3b^2}{a^2+b^2}$ 的最小值为__▲__.

16. 椭圆的两个焦点为 F_1，F_2，过 F_1 的直线交椭圆于 M，N 两点，$|MF_1|=\frac{4}{3}|NF_1|$，$|MF_2|=|F_1F_2|$，则椭圆的离心率为__▲__.

17. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$，$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=9$，则 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$ 的最大值是____▲____.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18.（本题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\sin x\cos x+\sin^2 x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期和值域；

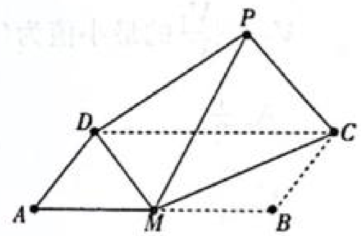
（Ⅱ）在锐角 $\triangle ABC$ 中，$f(A)=1$，求 $\sin(B+C+\frac{\pi}{6})$ 的值.

19.（本题满分 15 分）

如图，在矩形 $ABCD$ 中，$2BC=AB=2$，M 是 AB 的中点，沿直线 MC 将 $\triangle BCM$ 翻折成 $\triangle PCM$，$\angle PCD=60°$.

（Ⅰ）求证：$PC\perp DM$.

（Ⅱ）求直线 PM 与平面 PCD 所成角的正弦值.



20.（本题满分 15 分）

正项递增数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$4S_n=a_n^2+4n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

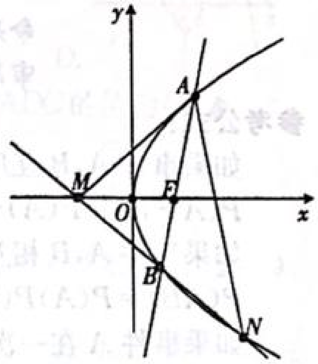
（Ⅱ）若 $a_1=1$，$b_n>0$，$b_n^2=1+\frac{2}{S_{n+1}}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明：$T_n<n+1$.

21.(本题满分 15 分)

过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作直线 l 交抛物线于 A,B 两点，过点 B 作直线 MN 交 x 轴于点 M，交抛物线于点 N，且 B 为 MN 的中点.

(Ⅰ)若 F 为△AMN 的重心，求点 A 的坐标；

(Ⅱ)当△ABN 面积最小时，求点 A 的横坐标.



22.(本题满分 15 分)

已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1-a}{x}-ax(a>0$ 且 $a\neq1)$.

(Ⅰ)讨论 $f(x)$的单调性.

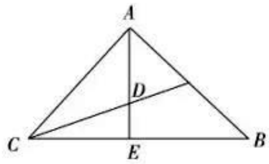
(Ⅱ)若 $f(x)<-1$ 恒成立，证明：方程 $f(x)+2a+1=0$ 有两根 s,t $(s<t)$且$\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{t}<\dfrac{3\sqrt{a}}{|a-1|}$.

2022年浙江省普通高中强基联盟统测
高三年级数学试题参考答案

1.C　2.B　3.A　4.D　5.C　6.B　7.C　8.D　9.B　10.A

11. $-\frac{2}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}$　12. $\frac{5}{6},\frac{1}{2}$　13. $-1,-2$　14. 6,2024　15. $\frac{7}{3}$　16. $\frac{5}{7}$　17. $3+3\sqrt{10}$

17. 解析：设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{DA},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{DB},\boldsymbol{c}=\overrightarrow{DC}$，



则 $AE=\frac{1}{2}BC=\frac{9}{2},AD=\frac{2}{3}AE=3,|\boldsymbol{a}|=3$.

$\because(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，

$\because\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，∴点 D 是$\triangle ABC$的重心，

$\therefore BA\perp CA$，$\therefore\triangle ABC$是直角三角形，

在$\triangle BDC$中，利用中线定理，得 $BD^2+CD^2=2(BE^2+DE^2)=45$，

即 $|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2=45$，$\therefore 90=2(|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)\geqslant(|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|)^2$，$\therefore|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|\leqslant3\sqrt{10}+3$.

18. 解：(Ⅰ) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}$， …… 4分

则最小正周期 $T=\pi$， …… 5分

值域为$[\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}]$. …… 7分

(Ⅱ)由 $f(A)=1$，得 $\sin(2A-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$， …… 8分

因为 A 为锐角，所以 $2A-\frac{\pi}{4}\in(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$， …… 9分

所以 $2A-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，解得 $A=\frac{\pi}{4}$. …… 10分

故 $\sin(B+C+\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. …… 14分

19. (Ⅰ)证明：由题可知 $PC=BC=1,CD=AB=2$，

由余弦定理得 $PD^2=PC^2+CD^2-2PC\cdot CD\cos\angle PCD=3$， …… 3分

$\therefore PC^2+PD^2=CD^2$，$\therefore PC\perp PD$. …… 5分

$\because PC\perp PM$，PM 和 PD 是平面 PDM 内两条相交直线，

$\therefore PC\perp$平面 PDM， …… 6分

$\therefore PC\perp DM$. …… 7分

(Ⅱ)解：(方法一)设 M 到平面 PCD 的距离为 h，直线 PM 与平面 PCD 所成角为 θ.

依题意可知，$DM=\sqrt{2}$， …… 8分

$\therefore DM^2+PM^2=PD^2$，$\therefore DM\perp PM$，$\triangle PDM$的面积为$\frac{\sqrt{2}}{2}$. …… 9分

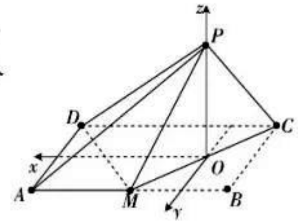
由(Ⅰ)知 $PC\perp PD$，$\therefore\triangle PCD$的面积为$\frac{1}{2}PC\cdot PD=\frac{\sqrt{3}}{2}$， …… 10分

由(Ⅰ)知 $PC\perp$平面 PDM，根据 $V_{M-PCD}=V_{C-PDM}$， …… 11分

得 $\frac{1}{3}h\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}$， …… 13分

$\therefore\sin\theta=\frac{h}{PM}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. …… 15分

(方法二)取 CM 的中点 O,以 O 为坐标原点,建立空间直角坐标系 $O-xyz$,如图所示,



则 $A(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0)$,$M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$,$C(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$,$D(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0)$,$P(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2})$,
………………………………………………………………………… 9 分

$\therefore \overrightarrow{PM}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$,$\overrightarrow{PC}=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$,$\overrightarrow{CD}=(2,0,0)$.

设平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{2}}{2}z=0$,且 $\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}=2x=0$,

令 $y=\sqrt{2}$,得平面 PCD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{2},-1)$. ………………………………………… 13 分

设直线 PM 与平面 PCD 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PM},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PM}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{1\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. ………………………………………… 15 分

20.(Ⅰ)解:当 $n=1$ 时,$4a_1=a_1^2+3$,解得 $a_1=1$ 或 $a_1=3$.

当 $a_1=1$ 时,$4(1+a_2)=a_2^2+7$,即 $a_2^2-4a_2+3=0$,解得 $a_2=1$ 或 $a_2=3$,$\therefore a_2=3$.

当 $a_1=3$ 时,$4(3+a_2)=a_2^2+7$,即 $a_2^2-4a_2-5=0$,解得 $a_2=5$. ………………………………………… 3 分

由 $4S_n=a_n^2+4n-1$,

当 $n\geqslant 2$ 时,$S_{n-1}=a_{n-1}^2+4(n-1)-1$,

两式相减得 $4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+4$,即 $a_{n-1}^2=a_n^2-4a_n+4=(a_n-2)^2$,

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_2>2$,所以 $a_{n-1}=a_n-2$,即 $a_n=a_{n-1}+2(n\geqslant 2)$,

$\therefore a_n=2n-1$,或 $a_n=2n+1$. ………………………………………………………… 7 分

(Ⅱ)证明:当 $a_1=1$ 时,$a_n=2n-1$,$S_n=n^2$,则 $S_{n+1}=(n+1)^2$,$b_n^2=1+\frac{2}{(n+1)^2}$.

$b_n^2=\frac{n^2+2n+3}{(n+1)^2}$,则 $b_n=\frac{\sqrt{n^2+2n+3}}{n+1}$,

$\therefore b_n-1=\frac{\sqrt{n^2+2n+3}}{2n+1}-1=\frac{\sqrt{n^2+2n+3}-(n+1)}{n+1}=\frac{2}{(n+1)[\sqrt{(n+1)^2+2}+(n+1)]}<\frac{2}{(n+1)\cdot 2(n+1)}=$
$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n<n+1-\frac{1}{n+1}<n+1$. ………………………………………… 15 分

21. 解:(Ⅰ)$F(1,0)$,设 $A(\frac{y_1^2}{4},y_1)$,$B(\frac{y_2^2}{4},y_2)$,$N(\frac{y_3^2}{4},y_3)$,$M(m,0)$.

由题意,$2y_2=y_3$,$y_1y_2=-4$,$\therefore y_2=-\frac{4}{y_1}$,$y_3=-\frac{8}{y_1}$. $\therefore m=-\frac{8}{y_1^2}$. ………………………………………… 4 分

$\therefore\begin{cases}y_1-\frac{8}{y_1}=0,\\ \frac{y_1^2}{4}+\frac{16}{y_1^2}-\frac{8}{y_1^2}=3,\end{cases}$ $\therefore y_1^2=8$,$\therefore A(2,\pm2\sqrt{2})$. ………………………………………… 7 分

(Ⅱ)$l_{AN}:(y_1+y_3)y=4x+y_1y_3=4(x-2)$,$\therefore AN$ 恒过 $D(2,0)$.

$S_{\triangle ABN}=\frac{1}{2}S_{\triangle AMN}$,设 $y_1>0$,

$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}|MD|\cdot|y_1-y_3|=\frac{32}{y_1^3}+\frac{12}{y_1}+y_1$. ………………………………………… 11 分

设 $f(x)=\frac{32}{x^3}+\frac{12}{x}+x(x>0)$,则 $f'(x)=-\frac{96}{x^4}-\frac{12}{x^2}+1$.

当 $0<x<\sqrt{6+2\sqrt{33}}$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>\sqrt{6+2\sqrt{33}}$ 时,$f'(x)<0$.

∴当 $y_1^2=6+2\sqrt{33}$ 时，$S_{\triangle AMN}$ 取最小值，此时 $x_A=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$. ………………………………………… 15分

22.(Ⅰ)解：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1-a}{x^2}-a=\dfrac{-ax^2-x-1+a}{x^2}=\dfrac{-a\left[x-(\frac{1}{a}-1)\right](x-1)}{x^2}$. ………………………………… 3分

①当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{1}{a}-1>1$，$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,\dfrac{1}{a}-1)$上单调递增，在$(\dfrac{1}{a}-1,+\infty)$上单调递减；

②当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{1}{a}-1=1$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；

③当 $\dfrac{1}{2}<a<1$ 时，$0<\dfrac{1}{a}-1<1$，$f(x)$在$(0,\dfrac{1}{a}-1)$上单调递减，在$(\dfrac{1}{a}-1,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减；

④当 $a>1$ 时，$\dfrac{1}{a}-1<0$，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减. ………………………… 7分

(Ⅱ)证明：由(Ⅰ)知，若 $f(x)<-1$ 恒成立，则 $a>1$.

当 $a>1$ 时，$f(x)_{\max}=f(1)=1-a-a=1-2a<-1$，故 $a>1$. ………………………………………… 9分

令 $g(x)=f(x)+2a+1=\ln x+\dfrac{1-a}{x}-ax+2a+1$，$g(1)=2>0$，

$$g\left(\frac{a-\sqrt{2a-1}}{a-1}\right)=\ln\frac{a-\sqrt{2a-1}}{a-1}+\frac{1-a}{\frac{a-\sqrt{2a-1}}{a-1}}-a\frac{a-\sqrt{2a-1}}{a-1}+1+2a<\frac{a-\sqrt{2a-1}}{a-1}-1+\frac{1-a}{\frac{a-\sqrt{2a-1}}{a-1}}$$

$$-a\frac{a-\sqrt{2a-1}}{a-1}+1+2a=-a+\sqrt{2a-1}+\frac{1-a}{\frac{a-\sqrt{2a-1}}{a-1}}+2a=0,$$

$$g\left(\frac{a+\sqrt{2a-1}}{a-1}\right)=\ln\frac{a+\sqrt{2a-1}}{a-1}+\frac{1-a}{\frac{a+\sqrt{2a-1}}{a-1}}-a\frac{a+\sqrt{2a-1}}{a-1}+1+2a<\frac{a+\sqrt{2a-1}}{a-1}-1+\frac{1-a}{\frac{a+\sqrt{2a-1}}{a-1}}$$

$$-a\frac{a+\sqrt{2a-1}}{a-1}+1+2a=-a-\sqrt{2a-1}+\frac{1-a}{\frac{a+\sqrt{2a-1}}{a-1}}+2a=0,$$

由零点存在定理知，存在 $s\in(\dfrac{a-\sqrt{2a-1}}{a-1},1)$，$t\in(1,\dfrac{a+\sqrt{2a-1}}{a-1})$，使得 $g(s)=g(t)=0$，又 $g(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，故 $g(x)$至多有两个零点，所以 $g(x)$有且只有两个零点，方程 $f(x)+2a+1=0$ 有两实根 s,t. ………………………………………………………… 13分

$\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{a-1}{a-\sqrt{2a-1}}-\dfrac{a-1}{a+\sqrt{2a-1}}=\dfrac{2\sqrt{2a-1}}{a-1}<\dfrac{3\sqrt{a}}{a-1}=\dfrac{3\sqrt{a}}{|a-1|}$. ………………………………… 15分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。