

海淀区高三年级第一学期期末练习

数 学 (理科)

2019.1

本试卷共4页,150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共40分)

一、选择题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

- (1) 双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 的左焦点的坐标为
(A) $(-2, 0)$ (B) $(-\sqrt{2}, 0)$ (C) $(-1, 0)$ (D) $(-4, 0)$
- (2) 已知向量 $a = (2, 0)$, $b = (t, 1)$, 且 $a \cdot b = |a|$, 则 a, b 的夹角大小为
(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{12}$
- (3) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, 公差 $d \neq 0$, 且 a_1, a_2, a_5 成等比数列, 则 $d =$
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- (4) 直线 $y = kx + 1$ 被圆 $x^2 + y^2 = 2$ 截得的弦长为2, 则 k 的值为
(A) 0 (B) $\pm \frac{1}{2}$ (C) ± 1 (D) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
- (5) 以正六边形的6个顶点中的3个作为顶点的三角形中, 等腰三角形的个数为
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 12
- (6) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x}$, 则“ $a < 0$ ”是“函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上存在零点”的
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- (7) 已知函数 $f(x) = \sin x - \cos x$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 则下列结论中错误的是
(A) 函数 $f(x)$ 的值域与 $g(x)$ 的值域相同
(B) 若 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 则 x_0 是函数 $g(x)$ 的零点
(C) 把函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位, 就可以得到函数 $g(x)$ 的图象
(D) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ 上都是增函数
- (8) 已知集合 $A = \{(s, t) | 1 \leq s \leq 50, 1 \leq t \leq 50, s \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{N}\}$. 若 $B \subseteq A$, 且对任意的 $(a, b) \in B$, $(x, y) \in B$, 均有 $(a-x)(b-y) \leq 0$, 则集合 B 中元素个数的最大值为
(A) 25 (B) 49 (C) 75 (D) 99

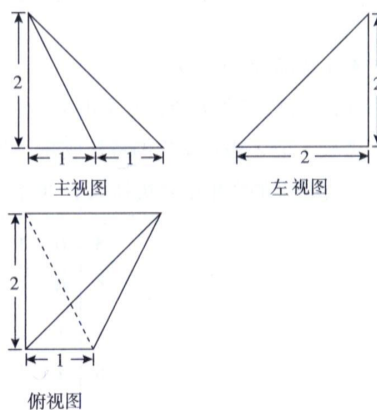
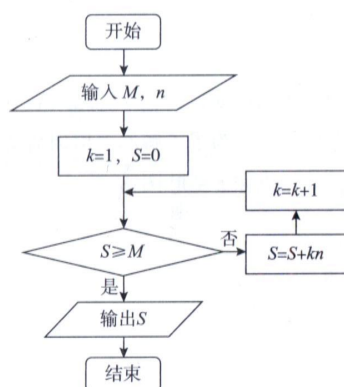
高三年级 (数学 - 理科) 第1页 (共4页)

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9) 以抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 F 为圆心，且与其准线相切的圆的方程为_____。

(10) 执行如下图所示的程序框图，当输入的 M 值为 15， n 值为 4 时，输出的 S 值为_____。



(11) 某三棱锥的三视图如上图所示，则这个三棱锥中最长的棱与最短的棱的长度分别为_____。

(12) 设关于 x, y 的不等式组 $\begin{cases} y \leq x, \\ x \leq 4, \\ y \geq kx - 2 \end{cases}$ 表示的平面区域为 Ω ，若 $A(1, -2), B(3, 0), C(2, -3)$

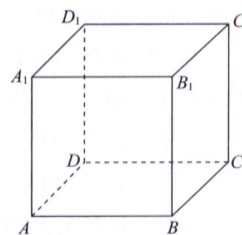
中有且仅有两个点在 Ω 内，则 k 的最大值为_____。

(13) 在 $\triangle ABC$ 中， $b = \sqrt{3}a$ ，且 $\cos 2A = \cos B$ ，则 $\cos A =$ _____。

(14) 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，动点 M 在线段 CC_1 上，动点 P 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上，且 $AP \perp$ 平面 MBD_1 。

(I) 当点 M 与点 C 重合时，线段 AP 的长度为_____；

(II) 线段 AP 长度的最小值为_____。



三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(15) (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = a\cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cos 2x$ ，其中 $a > 0$ 。

(I) 比较 $f(\frac{\pi}{6})$, $f(\frac{\pi}{2})$ 的大小；

(II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值。

(16) (本小题满分 13 分)

为迎接 2022 年冬奥会，北京市组织中学生开展冰雪运动的培训活动，并在培训结束后对学生进行了考核。记 X 表示学生的考核成绩，并规定 $X \geq 85$ 为考核优秀。为了了解本次培训活动的效果，在参加培训的学生中随机抽取了 30 名学生的考核成绩，并作成如下茎叶图：

5	0	1	1	6					
6	0	1	3	3	4	5	8		
7	1	2	3	6	7	7	7	8	
8	1	1	2	4	5	9			
9	0	0	1	2	3				

(I) 从参加培训的学生中随机选取一人，请根据图中数据，估计这名学生考核成绩优秀的概率；

(II) 从图中考核成绩满足 $X \in [70, 79]$ 的学生中任取 3 人，设 Y 表示这 3 人中成绩满足 $|X - 85| \leq 10$ 的人数，求 Y 的分布列和数学期望；

(III) 根据以往培训数据，规定当 $P\left(\left|\frac{X-85}{10}\right| \leq 1\right) \geq 0.5$ 时培训有效。请你根据图中数据，判断此次冰雪培训活动是否有效，并说明理由。

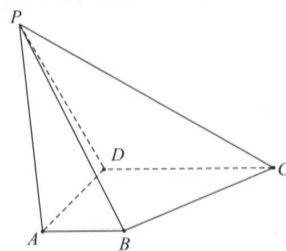
(17) (本小题满分 14 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $ABCD \perp$ 平面 PCD ，底面 $ABCD$ 为梯形， $AB \parallel CD$ ， $AD \perp PC$ ，且 $AB=1$ ， $AD=DC=DP=2$ ， $\angle PDC=120^\circ$ 。

(I) 求证： $AD \perp$ 平面 PDC ；

(II) 求二面角 $B-PD-C$ 的余弦值；

(III) 若 M 是棱 PA 的中点，求证：对于棱 BC 上任意一点 F ， MF 与 PC 都不平行。



(18) (本小题满分14分)

椭圆 $G: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左焦点为 F , 过点 $M(-2, 0)$ 的直线 l 与椭圆 G 交于不同的两点 A, B .

(I) 求椭圆 G 的离心率;

(II) 若点 B 关于 x 轴的对称点为 B' , 求 $|AB'|$ 的取值范围.

(19) (本小题满分13分)

已知函数 $f(x) = \frac{ax - x^2}{e^x}$.

(I) 当 $a = -1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 当 $a > 0$ 时, 求证: $f(x) > -\frac{2}{e}$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 成立.

(20) (本小题满分13分)

设 n 为不小于3的正整数, 集合 $\Omega_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$, 对于集合 Ω_n 中的任意元素 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 记

$$\alpha * \beta = (x_1 + y_1 - x_1 y_1) + (x_2 + y_2 - x_2 y_2) + \dots + (x_n + y_n - x_n y_n).$$

(I) 当 $n = 3$ 时, 若 $\alpha = (1, 1, 0)$, 请写出满足 $\alpha * \beta = 3$ 的所有元素 β ;

(II) 若 $\alpha, \beta \in \Omega_n$, 且 $\alpha * \alpha + \beta * \beta = n$, 求 $\alpha * \beta$ 的最大值和最小值;

(III) 设 S 是 Ω_n 的子集, 且满足: 对于 S 中的任意的两个不同元素 α, β , 有 $\alpha * \beta \geq n - 1$ 成立, 求集合 S 中元素个数的最大值.

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注