长春外国语学校 2023-2024 学年第一学期期初高三年级

数学试卷

出题人：杨柳　　审题人：陈燕

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 6 页。考试结束后，将答题卡交回。

注意事项：

1.答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区

2.选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。

3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。

4.作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。

5.保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

第 I 卷

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x|\ x^2-2x-8<0\},B=\{x|2^x-2>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $(1,+\infty)$　　B. $(1,4)$　　C. $(-2,4)$　　D. $(-2,+\infty)$

2. 已知曲线 $y=x+\frac{1}{k}\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与直线 $x+2y=0$ 垂直，则

A. $k=1$　　B. $k=2$　　C. $k=-1$　　D. $k=-2$

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，$f(1)=5$ 且 $f(x+3)=-f(x)$，则 $f(2022)+f(2023)=$

A. -5　　B. 2　　C. 0　　D. 5

4. 下列命题正确的是

A. “$\exists x\in R,\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)>0$”的否定为假命题

B. 若 $a>0,b>0,a+b+ab=3$，则 $a+b\geq 2$

C. 若“$\forall x\in \mathrm{R},ax^2+4x+1>0$”为真命题，则 $a\leq 4$

D. $a+b=0$ 的必要不充分条件是 $\frac{a}{b}=-1$

5 甲、乙两人独立地破译一份密码，密码被成功破译的概率为 $\frac{4}{5}$，已知甲单独破译密码的概率为 $\frac{3}{5}$，则乙单独破译密码的概率为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

6. 已知函数 $f(x)=|\log_3(x-1)|$，则

A. 函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递减　　B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

C. 若 $x_1\neq x_2$，但 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1\cdot x_2=1$　　D. 函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点

7. 随机变量 X 服从正态分布 $X\sim N(10,\sigma^2),P(X>12)=m,P(8\leq X\leq 10)=n$，则 $\frac{1}{2m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为

A. $3+4\sqrt{2}$　　B. $6+2\sqrt{2}$　　C. $6+4\sqrt{2}$　　D. $3+2\sqrt{2}$

8. 已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在区间 (a,b) 上有意义，若函数 $y=f(x)-g(x)$ 在 $x\in(a,b)$ 上至少有两个不同的零点，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 上是“关联函数”，区间 (a,b) 称为“关联区间”．若 $f(x)=kx$ 与 $g(x)=|\log_2 x|$ 在 $(0,8)$ 上是“关联函数”，则 k 可取的值是

A. -1　　B. 0　　C. $\frac{1}{4}$　　D. 1

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分。在每小题给出的四个选项中，至少有两项是符合要求的，全部选对得 5 分，少选得 2 分，错选或多选得 0 分。

9. 已知 $(2x-1)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，则

A. $a_0=1$　　B. $a_1=-20$

C. $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=0$　　D. $a_1+a_3+\cdots+a_9=1-3^{10}$

10. 已知函数 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，则

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称　　B. 函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

C. 函数 $f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$　　D. 函数 $f(x)$ 是减函数

11. 下列命题中正确是

A. 在回归分析中，可用相关系数 R 的值判断模型拟合效果，$|R|$ 越趋近于 0，模型的拟合效果越好

B. 已知随机变量 $X\sim B\left(n,\frac{1}{3}\right)$，若 $D(2X+1)=8$，则 $n=10$

C. 在经验回归方程 $\hat{y}=-0.3x+10$ 中，当解释变量每增加 1 个单位时，响应变量将平均减少 0.3 个单位

D. 已知采用分层抽样得到的高三年级 100 名男生、50 名女生的身高情况为：男生样本平均数 173，女生样本平均数 164，则总体样本平均数为 170

12. 用核酸检测的方法可以诊断是否患有新冠，假设 $P(\overline{A}|\overline{B})=0.999$，其中随机事件 A 表示“某次核酸检测被检验者阳性”，随机事件 B 表示“被检验者患有新冠”，现某人群中 $P(B)=0.01$，则在该人群中

A. 每 100 人必有 1 人患有新冠

B. 若某人没患新冠，则其核算检测为阴性的概率为 0.999

C. 若 $P(A|B)=0.99$，某人患有新冠，则其核酸检测为阳性的概率为 0.999

D. 若某人没患新冠，则其核酸检测为阳性的概率为 0.001

第 II 卷

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分。

13. 不等式 $\frac{1-x}{2+x}\geq 0$ 的解集为__________.

14. 设随机变量 X 的分布列如下：其中 a、b、c 成等差数列，若 $E(X)=\frac{1}{3}$，则方差 $D(X)=$__________.

X	-1	0	1
P	a	b	c

15. 为了落实立德树人的根本任务，践行五育并举，某校开设 A、B、C 三门德育校本课程，现有甲、乙、丙、丁四位同学参加校本课程的学习，每位同学仅报一门，每门至少有一位同学参加，则不同的报名方法有__________.

16. 2022 年卡塔尔世界杯是第二十二届世界杯足球赛，某支深受大家喜爱的足球队在对球员的使用上进行数据分析，根据以往的数据统计，A 运动员能够胜任中锋、边锋及前腰三个位置，且出场率分别为 0.3，0.5，0.2，当该运动员担当中锋、边锋及前腰时，球队输球的概率依次为 0.3，0.2，0.2. 当 A 球员参加比赛时，该球队某场比赛不输球的概率为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，17 题 10 分，18-22 题每题 12 分。

17. 函数 $f(x)$ 对任意的 $m,n\in\mathrm{R}$，都有 $f(m+n)=f(m)+f(n)-1$，并且 $x>0$ 时，恒有 $f(x)>1$.

(1) 求证：$f(x)$ 在 R 上是增函数；

(2) 若 $f(3)=4$ 解不等式 $f(a^2+a-5)<2$.

18. 某连锁经营公司所属 5 个零售店某月的销售额和利润额资料如表.

商店名称	A	B	C	D	E
销售额 x（千万元）	3	5	6	7	9
利润额 y（千万元）	2	3	3	4	5

(1) 若销售额和利润额具有相关关系，用最小二乘法计算利润额 y 对销售额 x 的回归直线方程.

（参考公式 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\cdot\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\cdot\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$）

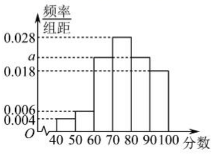
(2) 若该公司计划再开一个店想达到预期利润为 8 百万，请预估销售额需要达到多少百万?

19. 已知函数 $f(x)=\ln x+1$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=t$ 处的切线过原点，求切线 l 的方程；

(2) 令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，求证：$g(x)\le 1$.

20. 第四届应急管理普法知识竞赛线上启动仪式在 3 月 21 日上午举行，为普及应急管理知识，某高校开展了“应急管理普法知识竞赛”活动，现从参加该竞赛的学生中随机抽取 100 名，统计他们的成绩（满分 100 分），其中成绩不低于 80 分的学生被评为“普法王者”，将数据整理后绘制成如图所示的频率分布直方图.



(1) 若该校参赛人数达 20000 人，请估计其中有多少名“普法王者”；

(2) 随机从该高校参加竞赛的学生中抽取 3 名学生，记其中“普法王者”人数为 ξ，用频率估计概率，请你写出 ξ 的分布列.

21. 某甜品屋店庆当天为酬谢顾客，当天顾客每消费满一百元获得一次抽奖机会，奖品分别为价值 5 元，10 元，15 元的甜品一份，每次抽奖，抽到价值为 5 元，10 元，15 元的甜品的概率分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，且每次抽奖的结果相互独立.

(1) 若某人当天共获得两次抽奖机会，设这两次抽奖所获甜品价值之和为 X 元，求 X 的分布列与期望；

(2) 某大学“爱牙协会”为了解“爱吃甜食”与青少年“蛀牙”情况之间的关系，随机对 200 名青少年展开了调查，得知这 200 个人中共有 120 个人“有蛀牙”，其中“不爱吃甜食”但“有蛀牙”的有 35 人，“不爱吃甜食”且”无蛀牙”的也有 35 人.

	有蛀牙	无蛀牙
爱吃甜食		
不爱吃甜食		

完成上面的列联表，试根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，分析“爱吃甜食”是否更容易导致青少年“蛀牙”.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$\alpha=P(\chi^2\ge k_0)$	0.05	0.01	0.005
k	3.841	6.635	7.879

22. 已知函数 $f(x)=e^x-ax$（e 是自然对数的底数）.

(1) 当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的极值点；

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(3) 若 $g(x)=e^x(x-1)-a\ln x+f(x)$ 有两个零点，求实数 a 的取值范围.

长春外国语学校 2023-2024 学年第一学期期初高三年级

数学答案

一 单选题

1. B
2. A
3. D
4. B
5. A
6. A
7. D
8. C

二 多选题

9. ABC
10. AC
11. CD
12. BD

三 填空题

13 $(-2,1]$

14. $\frac{5}{9}$

15. 36

16. 0.77

四 解答题

17(1)略

(2) $a\in(-3,2)$.

18 (1) $\hat{y}=0.5x+0.4$

(2)8 百万

19 (1) $y=x$.

(2) 证明：$\because g(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$，

$\therefore g'(x)=\dfrac{1-\ln x-1}{x^2}=-\dfrac{\ln x}{x^2}$，

由 $g'(x)>0$ 有：$0<x<1$，由 $g'(x)<0$ 有：$x>1$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 的最大值为 $g(1)=f(1)=1$，

$\therefore g(x)\le 1$.

20 (1) $0.4\times 20000=8000$.

(2) 随机从该高校参加竞赛的学生中抽取 3 名学生，记其中"普法王者"人数为 ξ，

则 ξ 的取值为 0，1，2，3，

由 (1) 知，从中任取一人是"普法王者"的概率为 $\frac{2}{5}$，不是"普法王者"的概率为 $\frac{3}{5}$，

则 $P(\xi=0)=C_3^0\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$，$P(\xi=1)=C_3^1\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{54}{125}$，

$P(\xi=2)=C_3^2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{36}{125}$，$P(\xi=3)=C_3^3\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$；

故 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

21 （1）由题意可得 X 的所有可能取值为 $10,15,20,25,30$，

$P(X=10)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

$P(X=15)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，

$P(X=20)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{18}$，

$P(X=25)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$，

$P(X=30)=\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$，

则 X 的分布列为

X	10	15	20	25	30
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

故 $E(X)=10\times\frac{1}{4}+15\times\frac{1}{3}+20\times\frac{5}{18}+25\times\frac{1}{9}+30\times\frac{1}{36}=\frac{50}{3}$.

（2）由题意可得列联表如下：

	有蛀牙	无蛀牙
爱吃甜食	85	45
不爱吃甜食	35	35

所有 $\chi^2=\frac{200(45\times35-85\times35)^2}{120\times80\times70\times130}\approx4.487$，

查表可得 $P(\chi^2\geq3.841)=5\%$，

因为 $\chi^2>3.841$，

所以在犯错误的概率不超过5%的前提下，可以认为"爱吃甜食"与青少年"蛀牙"有关.

22 （1）$f(x)$ 极小值点为 $x=0$，无极大值点.

（2）求导 $f'(x)=e^x-a$

①当 $a\leq0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 R 上递增

②当 $a>0$ 时，

当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上递减，

当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上递增.

（3）等价于 $g(x)=xe^x-a(\ln x+x)=xe^x-a\ln(xe^x)(x>0)$ 有两个零点，

令 $t=xe^x,(x>0)$，则 $t'=(x+1)e^x>0$ 在 $x>0$ 时恒成立，所以 $t=xe^x$ 在 $x>0$ 时单调递增，故 $t>0$，

所以 $g(x)=xe^x-a\ln(xe^x)$ 有两个零点，等价于 $h(t)=t-a\ln t$ 有两个零点.

因为 $h'(t)=1-\frac{a}{t}=\frac{t-a}{t}$，

①当 $a\leq0$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 在 $t>0$ 上单调递增，不可能有两个零点，不符合题意舍去，

②当 $a>0$ 时，令 $h'(t)>0$，得 $t>a$，$h(t)$ 单调递增，令 $h'(t)<0$，得 $0<t<a$，$h(t)$ 单调递减，

所以 $h(t)_{\min}=h(a)=a-a\ln a$.

若 $h(a)>0$，得 $0<a<e$，此时 $h(t)>0$ 恒成立，没有零点；

若 $h(a)=0$，得 $a=e$，此时 $h(t)$ 有一个零点.

若 $h(a)<0$，得 $a>e$，因为 $h(1)=1>0$，$h(e)=e-a<0$，$h(e^{100a})=e^{100a}-100a^2>0$，

所以 $h(t)$ 在 $(1,e)$，(e,e^{100a}) 上各存在一个零点，符合题意，

综上，a 的取值范围为 $(e,+\infty)$.