绝密★启用前

# 高三数学考试(理科)

(考试时间:120 分钟　试卷满分:150 分)

**注意事项:**

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

**一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.**

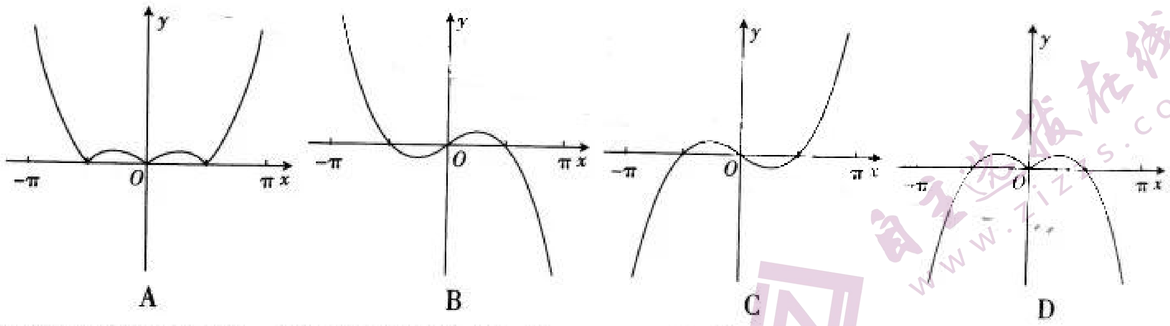
1. 设集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$, $B=\{x|2x^2+(a-4)x-2a\leqslant 0\}$,且 $A\cap B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$,则 $a=$

A. 1　　B. $-1$　　C. 2　　D. $-2$

2. 设 $-(z+\bar{z})+2(z-\bar{z})=-4-4i$,则 $z=$

A. $2-i$　　B. $2+i$　　C. $1-2i$　　D. $1+2i$

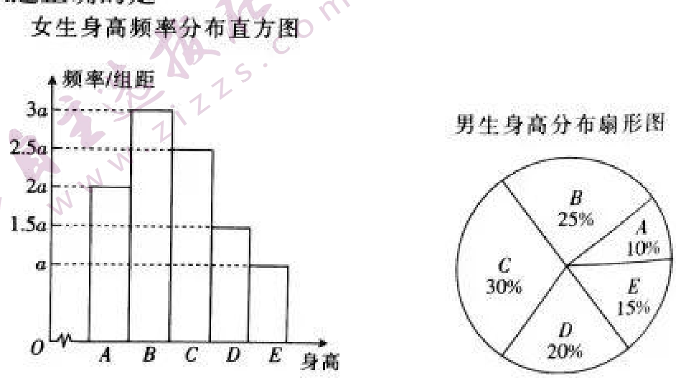
3. 函数 $f(x)=\cos x\cdot\ln\dfrac{\pi+x}{\pi-x}$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的图象大致为




4. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 90,且 $a_1-a_3=36$,则 $a_5=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 某市教育局为得到高三年级学生身高的数据,对高三年级学生进行抽样调查,随机抽取了 1000 名学生,他们的身高都在 $A,B,C,D,E$ 五个层次内,分男、女生统计得到以下样本分布统计图,则所给叙述正确的是



A. 样本中 $A$ 层次的女生比相应层次的男生人数多

B. 估计样本中男生身高的中位数比女生身高的中位数大

C. $D$ 层次的女生和 $E$ 层次的男生在整个样本中频率相等

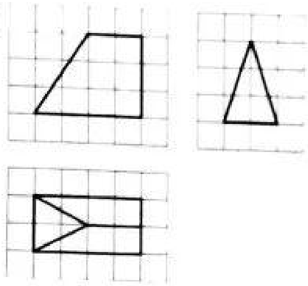
D. 样本中 $B$ 层次的学生数和 $C$ 层次的学生数一样多

6. 已知函数 $f(x)=\frac{4|x|}{1+|x|}$，则不等式 $f(2x-3)<2$ 的解集是

A. $(1,2)$　　　　B. $(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$

C. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　　　　D. $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{5}{2},+\infty)$

7. 如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为 1，则该多面体的体积为



A. $\frac{16}{3}$

B. 8

C. $\frac{28}{3}$

D. 10

8. 将函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，若 $y=g(x)$ 为奇函数，则 $\omega$ 的最小值为

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

9. 已知三棱锥 $A-BCD$ 的底面是正三角形，$AB\perp$ 平面 $BCD$，且 $AB=BC$，则直线 $AB$ 与平面 $ACD$ 所成角的正弦值为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{21}}{7}$　　C. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

10. 6 名志愿者要到 $A,B,C$ 三个社区进行志愿服务，每个志愿者只去一个社区，每个社区至少安排 1 名志愿者，若要 2 名志愿者去 $A$ 社区，则不同的安排方法共有

A. 105 种　　B. 144 种　　C. 150 种　　D. 210 种

11. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别是 $F_1,F_2$，过右焦点 $F_2$ 且不与 $x$ 轴垂直的直线交 $C$ 的右支于 $A,B$ 两点，若 $AF_1\perp AB$，且 $|AB|=2|AF_1|$，则 $C$ 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $1+\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $1+\sqrt{3}$

12. 已知 $a>0$，若对任意的 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$，不等式 $\frac{1}{2}e^{ax}-\frac{\ln(2x)}{a}\geq 0$ 恒成立，则实数 $a$ 的取值范围是

A. $[\frac{2}{e},+\infty)$　　B. $[\frac{1}{e},+\infty)$　　C. $[1,+\infty)$　　D. $[\frac{1}{2e},+\infty)$

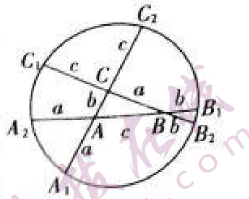
**二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.**

13. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_1=3,a_2+a_4=14$，则 $a_{40}=$ ▲ .

14. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{b}|=1$，且 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$ ▲ .

15. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点是 $F$，$A$ 是 $C$ 的准线上一点，线段 $AF$ 与 $C$ 交于点 $B$，与 $y$ 轴交于点 $D$，且 $|AB|=\sqrt{5}|BF|$，$S_{\triangle DOF}=4$（$O$ 为原点），则 $C$ 的方程为 ▲ .

16. "康威圆定理"是英国数学家约翰·康威引以为豪的研究成果之一. 定理的内容如下：如图，$\triangle ABC$ 的三条边长分别为 $|BC|=a$，$|AC|=b$，$|AB|=c$. 延长线段 $CA$ 至点 $A_1$，使得 $|AA_1|=a$，延长线段 $AC$ 至点 $C_2$，使得 $|CC_2|=c$，以此类推得到点 $A_2$，$B_1$，$C_1$，$B_2$，那么这六个点共圆，这个圆称为康威圆. 已知 $a=12$，$b=5$，$c=13$，则由 $\triangle ABC$ 生成的康威圆的半径为___▲___.




三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17. (12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 $A,B,C$ 的对边分别是 $a,b,c$，且 $b\sin(C+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}a+\sqrt{3}c}{2}$.

(1)求 $B$；

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，且 $\sin A+\sin C=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin B$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (12 分)

第 24 届冬季奥林匹克运动会于 2022 年 2 月 4 日至 20 日在北京和张家口举行，而北京也成为全球唯一主办过夏季奥运会和冬季奥运会的双奥之城. 某学校为了庆祝北京冬奥会的召开，特举行奥运知识竞赛. 参加的学生从夏奥知识题中抽取 2 题，冬奥知识题中抽取 1 题回答，已知学生(含甲)答对每道夏奥知识题的概率为 $\frac{3}{4}$，答对每道冬奥知识题的概率为 $\frac{2}{3}$，每题答对与否不影响后续答题.

(1)学生甲恰好答对两题的概率是多少？

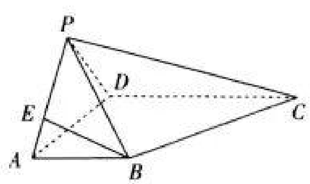
(2)求学生甲答对的题数 $X$ 的分布列和数学期望.

19. (12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，点 $E$ 是棱 $PA$ 上一点，$BE\perp PD$，$PA=PB=PD$，$AB=AD=\frac{1}{2}CD=2$，$\angle DAB=60°$.

(1)证明：$PD\perp$ 平面 $PAB$.

(2)若 $CD/\!/AB$，求二面角 $A-PD-C$ 的正弦值.



20.(12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点是 $M(2,0)$，离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆 $C$ 的标准方程.

(2)过点 $T(4,0)$ 作直线 $l$ 与椭圆 $C$ 交于不同的两点 $A,B$，点 $B$ 关于 $x$ 轴的对称点为 $D$，问直线 $AD$ 是否过定点？若是，求出该定点的坐标；若不是，请说明理由.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x-mx+2$ 有两个零点 $x_1,x_2$.

(1)求 $m$ 的取值范围；

(2)证明：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>2e$.

**(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.**

22.[选修 4－4：坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 $xOy$ 中，曲线 $C$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1-2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ ($\theta$ 为参数). 以坐标原点为极点，$x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 $l$ 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$.

(1)求曲线 $C$ 的普通方程与直线 $l$ 的直角坐标方程；

(2)若直线 $l'$ 过点 $M(-2,1)$ 且与直线 $l$ 平行，直线 $l'$ 交曲线 $C$ 于 $A,B$ 两点，求 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}$ 的值.

23.[选修 4－5：不等式选讲](10 分)

已知 $a,b,c$ 均为正数，且 $4a^2+b^2+16c^2=1$，证明：

(1)$2a+b+4c\leqslant\sqrt{3}$；

(2)$\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{16c^2}\geqslant 9$.

# 高三数学考试参考答案(理科)

1. C 【解析】本题考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.

因为 $B=\{x|-\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant 2\}$,$A\cap B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$,所以 $-\frac{a}{2}=-1$,解得 $a=2$.

2. A 【解析】本题考查复数的四则运算,考查数学运算的核心素养.

设 $z=a+bi$,$a,b\in\mathbf{R}$,因为 $-(z+\bar{z})+2(z-\bar{z})=-4-4i$,所以 $-2a+4bi=-4-4i$,解得 $a=2$,$b=-1$,则 $z=2-i$.

3. B 【解析】本题考查函数的图象和性质,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

因为 $f(-x)=\cos x\cdot\ln\frac{\pi-x}{\pi+x}=-f(x)$,所以 $f(x)$是奇函数,排除A,D.当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$时,$\cos x>0$,$\ln\frac{\pi+x}{\pi-x}>0$,所以 $f(x)>0$,排除C,故选B.

4. C 【解析】本题考查等比数列的通项公式及求和公式,考查数学运算的核心素养.

设公比为 $q$,由题设知 $\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=90$,即 $\frac{a_1(1-q^2)(1+q^2)}{1-q}=90$,又 $a_1(1-q^2)=36$,所以 $\frac{36(1+q^2)}{1-q}=90$,解得 $q=\frac{1}{2}$ 或 $q=-3$(舍去),所以 $a_1=48$,从而 $a_5=3$.

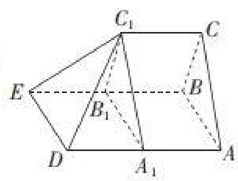
5. B 【解析】本题考查统计的知识,考查数据分析与数学运算的核心素养.

设女生身高频率分布直方图中的组距为 $\Delta x$,由 $(a+1.5a+2a+2.5a+3a)\Delta x=1$,得 $a\Delta x=0.1$,所以女生身高频率分布直方图中 $A$ 层次频率为 20%,$B$ 层次频率为 30%,$C$ 层次频率为 25%,$D$ 层次频率为 15%,$E$ 层次频率为 10%.因为男、女生样本数未知,所以 $A$ 层次中男、女生人数不能比较,即选项A错误;同理,$D$ 层次女生在女生样本数中频率与 $E$ 层次男生在男生样本数中频率相等,都是 15%,但因男、女生人数未知,所以在整个样本中频率不一定相等,即C错误;设女生人数为 $n$,男生人数为 $1000-n$,但因男、女生人数可能不相等,则 $B$ 层次的学生数为 $0.3n+0.25\times(1000-n)=0.05n+250$,$C$ 层次的学生数为 $0.25n+0.3\times(1000-n)=300-0.05n$,因为 $n$ 不确定,所以 $0.05n+250$ 与 $300-0.05n$ 可能不相等,即D错误;女生 $A$,$B$ 两个层次的频率之和为 50%,所以女生的样本身高中位数为 $B$,$C$ 层次的分界点;男生 $A$,$B$ 两个层次的频率之和为 35%,显然中位数落在 $C$ 层次内,所以样本中男生身高的中位数比女生身高的中位数大,B正确.

6. A 【解析】本题考查函数的性质,考查逻辑推理的核心素养.

因为 $f(-x)=f(x)$,所以 $f(x)$是偶函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=\frac{4x}{1+x}=4-\frac{4}{1+x}$ 是增函数,又因为 $f(1)=2$,所以 $f(2x-3)<2$ 可化为 $|2x-3|<1$,解得 $1<x<2$.

7. D 【解析】本题考查三视图,考查直观想象与数学运算的核心素养.




如图,这是所求多面体的直观图,它可以看成由直三棱柱与四棱锥组合而成,所以体积 $V=(\frac{1}{2}\times2\times3)\times2+\frac{1}{3}\times(2\times2)\times3=10$.

8. C 【解析】本题考查三角函数的性质,考查数学运算与直观想象的核心素养.

由题意,$g(x)=\sin[\frac{\omega}{2}(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=\sin(\frac{\omega}{2}x+\frac{\pi}{6}-\frac{\omega\pi}{12})$,因为 $y=g(x)$为奇函数,所以 $\frac{\pi}{6}-\frac{\omega\pi}{12}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\omega=2-12k(k\in\mathbf{Z})$,又 $\omega>0$,所以当 $k=0$ 时,$\omega$ 取得最小值 2.

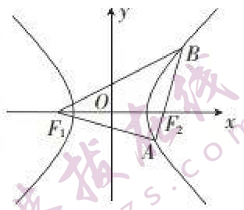
9. B 【解析】本题考查三棱锥中线面角的正弦值的计算,考查直观想象与数学建模的核心素养.

设 $AB=BC=2$,$CD$ 的中点为 $E$,连接 $AE$,$BE$(图略),易知 $\angle BAE$ 是直线 $AB$ 与平面 $ACD$ 所成的角,因为 $AB\perp BE$,所以 $\sin\angle BAE=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2^2+3}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

10. D 【解析】本题考查排列组合的知识,考查数学抽象与数学建模的核心素养.

先选出 2 名志愿者安排到 $A$ 社区,再把剩下的 4 名志愿者分成两组,分配到其他两个社区,则不同的安排方法共有 $C_6^2(\frac{C_4^2C_2^2}{2}+C_4^1)A_2^2=210$ 种.

11. C 【解析】本题考查双曲线的性质，考查推理论证能力与数学运算的核心素养.




如图，设$|AF_1|=m$，则$|AF_2|=m-2a$. 又$|AB|=2|AF_1|$，所以$|BF_2|=m+2a$，所以$|BF_1|=m+4a$. 又$AF_1\perp AB$，所以$|BF_1|=\sqrt{5}m$，由$m+4a=\sqrt{5}m$，得$m=(\sqrt{5}+1)a=|AF_1|$，则$|AF_2|=m-2a=(2\sqrt{5}-1)a$，而$|F_1F_2|=2c$，则$4c^2=(\sqrt{5}+1)^2a^2+(\sqrt{5}-1)^2a^2$，化简得$c^2=3a^2$，所以$e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$.

12. A 【解析】本题考查应用导数解决函数问题，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

因为$a>0$，不等式$\frac{1}{2}e^{ax}-\frac{\ln(2x)}{a}\geqslant 0$恒成立，即$\frac{1}{2}e^{ax}\geqslant\frac{\ln(2x)}{a}$成立，即$ae^{ax}\geqslant 2\ln(2x)$，进而转化为$axe^{ax}\geqslant 2x\ln(2x)=e^{\ln(2x)}\cdot\ln(2x)$恒成立.

令$g(x)=xe^x$，则$g'(x)=(x+1)e^x$，当$x>0$时，$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则不等式$\frac{1}{2}e^{ax}-\frac{\ln(2x)}{a}\geqslant 0$恒成立等价于$g(ax)\geqslant g(\ln(2x))$恒成立.

因为$a>0$，$x\in(\frac{1}{2},+\infty)$，所以$ax>0$，$\ln(2x)>0$，所以$ax\geqslant\ln 2x$对任意的$x\in(\frac{1}{2},+\infty)$恒成立，所以$\frac{a}{2}\geqslant\frac{\ln(2x)}{2x}$恒成立.

设$h(t)=\frac{\ln t}{t}(t>1)$，可得$h'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$. 当$1<t<e$时，$h'(t)>0$，$h(t)$单调递增；当$t>e$时，$h'(t)<0$，$h(t)$单调递减. 所以当$t=e$时，函数$h(t)$取得最大值，最大值为$h(e)=\frac{1}{e}$，此时$2x=e$，所以$\frac{a}{2}\geqslant\frac{1}{e}$，解得$a\geqslant\frac{2}{e}$. 即实数$a$的取值范围是$[\frac{2}{e},+\infty)$.

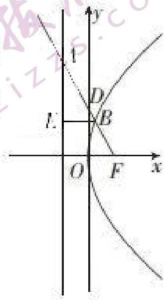
13. 81 【解析】本题考查等差数列的通项公式，考查数学运算的核心素养.

因为$a_2+a_4=2a_3=14$，所以$a_3=7$. 又$a_1=3$，所以公差$d=2$，从而$a_{40}=3+2\times 39=81$.

14. 1 【解析】本题考查平面向量的垂直以及求模，考查数学运算的核心素养.

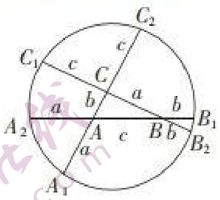
因为$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，所以$\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=1$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$.

15. $y^2=8x$ 【解析】本题考查抛物线的概念与性质，考查逻辑推理的核心素养.




过点$B$作抛物线$C$准线的垂线，垂足为$E$，由抛物线的定义知，$|BF|=|BE|$. 又$|AB|=\sqrt{5}|BF|$，所以$|AE|=2|BE|$，所以$\tan\angle EAB=\frac{1}{2}$，所以$\tan\angle ODF=\frac{1}{2}$. 又$|OF|=\frac{p}{2}$，所以$|OD|=p$，所以$S_{\triangle DOF}=4=\frac{1}{2}\times\frac{p}{2}\times p=\frac{p^2}{4}$，则$p=4$，所以抛物线$C$的方程为$y^2=8x$.

16. $\sqrt{229}$ 【解析】本题考查直线与圆，考查直观想象与数学抽象的核心素养.




因为$|CC_1|=|CC_2|$，$|CA_1|=|CB_2|$，所以康威圆的圆心在$\angle ACB$的平分线上，同理可知康威圆的圆心在$\angle ABC$的平分线上，即康威圆的圆心为$\triangle ABC$的内心. 因为$a^2+b^2=c^2$，所以$\angle ACB=90^\circ$，所以$\triangle ABC$的内切圆的半径$r=\frac{5+12-13}{2}=2$，则康威圆的半径$R=\sqrt{r^2+(\frac{5+12+13}{2})^2}=\sqrt{229}$.

17. 解：(1)因为$b\sin(C+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}a+\sqrt{3}c}{2}$，来源微信公众号：高三答案

所以$\sin B(\frac{1}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C$， ………………………… 2分

展开得$\frac{1}{2}\sin B\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C$，

整理得$\frac{1}{2}\sin B-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$\sin(B-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$， ………………………………………………………… 4 分

又$0<B<\pi$，则$B-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，所以$B=\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)知$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\sqrt{3}$，解得$ac=4$， ……………………………………………… 8 分

因为$\sin A+\sin C=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin B$，所以$b=\frac{\sqrt{3}(a+c)}{2}$，由余弦定理得$a^2+c^2-b^2=2ac\cos B=-ac$， …… 10 分

即$(a+c)^2-\frac{3(a+c)^2}{4}=ac=4$，解得$a+c=4$，$b=2\sqrt{3}$， ………………………………………………… 11 分

所以$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=2\sqrt{3}+4$. ……………………………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，写出$\sin B(\frac{1}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C$，得 2 分，写出$\sin(B-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，累计得 4 分，第一问全部正确解出，累计得 6 分.

【2】第二问，用面积公式求出$ac=4$，累计得 8 分，最后求出正确答案，累计得 12 分.

【3】其他情况根据评分标准按步骤给分.

18. 解：(1)学生甲恰好答对两题的概率$P=(\frac{3}{4})^2\times\frac{1}{3}+2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{16}$. …………………………… 4 分

(2)随机变量$X$的可能取值为 0，1，2，3， ……………………………………………………………… 5 分

所以$P(X=0)=(\frac{1}{4})^2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{48}$. ……………………………………………………………………… 6 分

$P(X=1)=C_2^1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+(\frac{1}{4})^2\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$. ……………………………………………………… 7 分

由(1)知$P(X=2)=\frac{7}{16}$，……………………………………………………………………………………… 8 分

$P(X=3)=(\frac{3}{4})^2\times\frac{2}{3}=\frac{3}{8}$，……………………………………………………………………………… 9 分

所以$X$的分布列为

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{7}{16}$ | $\frac{3}{8}$ |

……………………………………………………………………………………………………………… 10 分

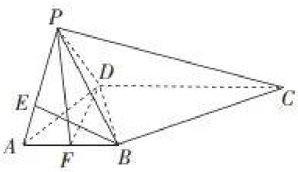
$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{7}{16}+3\times\frac{3}{8}=\frac{13}{6}$. ………………………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，算出$P=\frac{7}{16}$，得本步骤的 4 分.

【2】第二问，写出随机变量$X$的可能取值得 1 分，每算出一个概率得 1 分，正确写出期望累计得 12 分.

19. (1)证明：取$AB$的中点$F$，连接$FD$，$FP$，$BD$.




因为$PA=PB$，$AB=AD$，$\angle DAB=60°$，所以$AB=AD=BD$，

所以$AB\perp PF$，$AB\perp FD$. ………………………………………………………… 2 分

又$PF\cap FD=F$，所以$AB\perp$平面$PFD$，从而$AB\perp PD$. ………………………… 3 分

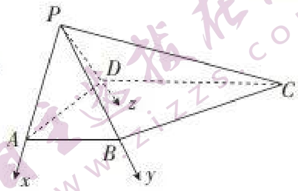
因为$BE\perp PD$，$AB\cap BE=B$，所以$PD\perp$平面$PAB$. …………………………… 5 分

(2)解：因为$PD\perp$平面$PAB$，所以$PD\perp PB$，$PD\perp PA$，又$AB=AD=BD=2$，

所以$PA=PB=PD=\sqrt{2}$.

因为 $PA^2+PB^2=AB^2$，所以 $PB\perp PA$. ························································ 6 分

以 $P$ 为坐标原点，$\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PD}$的方向分别为 $x,y,z$ 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $P-xyz$. ························································································ 7 分




则 $A(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$D(0,0,\sqrt{2})$，

因为 $CD/\!/AB$，所以$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{PD}=(0,0,\sqrt{2})$. ········· 8 分

设平面 $PDC$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y=0,\\ \sqrt{2}z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=1,z=0$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,1,0)$. ········································································ 10 分

因为 $PB\perp PA$，$PD\perp PB$，所以 $PB\perp$平面 $PAD$，所以平面 $PAD$ 的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(0,1,0)$，········· 11 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即二面角 $A-PD-C$ 的正弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ················ 12 分

评分细则：

【1】第一问，证出 $AB\perp PF$，$AB\perp FD$，得 2 分，证出 $AB\perp PD$，累计得 3 分，第一问全部证完累计得 5 分.

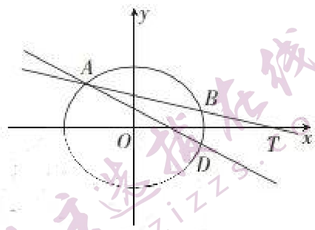
【2】第二问，建立空间直角坐标系累计得 7 分，写出相关点和相关向量的坐标，累计得 8 分，计算出平面 $PDC$ 的法向量累计得 10 分，写出平面 $PAD$ 的一个法向量累计得 11 分，直至正确求出二面角的正弦值累计得 12 分.

【3】若用传统做法，作出二面角的平面角得 1 分，简单证明得 2 分，整个题完全正确得满分.

20. 解：(1)由右顶点是 $M(2,0)$得 $a=2$，又离心率 $e=\dfrac{1}{2}=\dfrac{c}{a}$，所以 $c=1$， ································ 2 分

所以 $b^2=a^2-c^2=3$，所以椭圆 $C$ 的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ··············································· 4 分

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，显然直线 $l$ 的斜率存在.




设直线 $l$ 的方程为 $y=k(x-4)$，联立方程组$\begin{cases}y=k(x-4),\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$

消去 $y$ 得$(4k^2+3)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$，由 $\Delta>0$，得$-\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{1}{2}$.

所以 $x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{64k^2-12}{4k^2+3}$. ·········································· 6 分

因为点 $D(x_2,-y_2)$，所以直线 $AD$ 的方程为 $y=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)+k(x_1-4)$. ······························ 7 分

又 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-8)$， ································································································ 8 分

所以直线 $AD$ 的方程可化为 $y=\dfrac{24k}{(x_2-x_1)(4k^2+3)}x+\dfrac{kx_1(x_1+x_2-8)}{x_2-x_1}+\dfrac{k(x_1-4)(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$，········· 10 分

即 $y=\dfrac{24k}{(x_2-x_1)(4k^2+3)}x-\dfrac{24k}{(x_2-x_1)(4k^2+3)}=\dfrac{24k}{(x_2-x_1)(4k^2+3)}(x-1)$，····························· 11 分

所以直线 $AD$ 恒过点$(1,0)$. ································································································ 12 分

评分细则：

(方法二)(1)同上(1). ············································································································ 4 分

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 $l$ 的方程为 $x=my+4$，

联立方程组$\begin{cases}x=my+4,\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$消去 $x$ 得$(3m^2+4)y^2+24my+36=0$，

由 $\Delta>0$，得 $m>2$ 或 $m<-2$，所以 $y_1+y_2=-\dfrac{24m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{36}{3m^2+4}$. ······································ 6 分

因为点 $D(x_2,-y_2)$，则直线 $AD$ 的方程为 $y=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)+y_1$. ··········································· 7 分

又 $x_1-x_2=my_1+4-my_2-4=m(y_1-y_2)$， ·············································································· 8 分

所以直线 $AD$ 的方程可化为 $y=\frac{-(y_1+y_2)}{m(y_2-y_1)}(x-my_1-4)+y_1=-\frac{y_1+y_2}{m(y_2-y_1)}x+\frac{(y_1+y_2)(my_1+4)+y_1m(y_2-y_1)}{m(y_2-y_1)}=-\frac{y_1+y_2}{m(y_2-y_1)}x+\frac{2my_1y_2+4(y_1+y_2)}{m(y_2-y_1)}=\frac{24}{(3m^2+4)(y_2-y_1)}(x-1)$,

此时直线 $AD$ 恒过点 $(1,0)$, ……………………………………………… 10 分

当直线 $l$ 的斜率为 0 时,直线 $l$ 的方程为 $y=0$,也过点 $(1,0)$. …………………… 11 分

综上,直线 $AD$ 恒过点 $(1,0)$. ……………………………………………… 12 分

说明:第(2)问还可以先猜想出定点在 $x$ 轴上,写出直线 $AD$ 的方程,令 $y=0$,求出定点坐标为 $(1,0)$ 后再加以证明,也可以得满分.

21. (1)解:由题意知,$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, ……………………………………… 1 分

$\ln x-mx+2=0$ 有两个根,等价于方程 $\frac{\ln x+2}{x}=m$ 有两个根.

设 $g(x)=\frac{\ln x+2}{x}$,即 $g(x)=\frac{\ln x+2}{x}$ 的图象与直线 $y=m$ 有两个交点. ……………… 2 分

因为 $g'(x)=\frac{-\ln x-1}{x^2}$,所以 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上单调递增,在 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 上单调递减, ……………… 3 分

$g(x)_{\max}=g(\frac{1}{e})=e$,当 $x\to0+$ 时,$g(x)\to-\infty$,当 $x\to+\infty$ 时,$g(x)\to0$,由图可知,$m$ 的取值范围是 $(0,e)$.

……………………………………………………………………… 5 分

(2)证明:由(1)知方程 $\frac{\ln x+2}{x}=m$ 的两个根分别为 $x_1,x_2$,则 $\frac{\ln x_1+2}{x_1}=\frac{\ln x_2+2}{x_2}$.

令 $t_1=\frac{1}{x_1}$,$t_2=\frac{1}{x_2}$,则 $2t_1-t_1\ln t_1=2t_2-t_2\ln t_2$, ……………………………… 6 分

设 $t_1<t_2$,$h(t)=2t-t\ln t$,则 $h'(t)=1-\ln t$,易知 $h(t)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增,在 $(e,+\infty)$ 上单调递减,且 $h(t_1)=h(t_2)$,$0<t_1<e<t_2$. ……………………………………………… 7 分

设 $H(t)=h(t)-h(2e-t)(0<t<e)$,则 $H'(t)=h'(t)+h'(2e-t)$.

因为 $H'(t)=1-\ln t+[1-\ln(2e-t)]=2-\ln(-t^2+2et)>2-\ln(-e^2+2e^2)=0$,

所以 $H(t)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增, ……………………………………………… 9 分

所以 $H(t_1)<H(e)=0$,即 $h(t_1)<h(2e-t_1)$,从而 $h(t_2)<h(2e-t_1)$. ……………… 10 分

因为 $0<t_1<e<t_2$,所以 $2e-t_1>e$,

又 $h(t)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减,所以 $t_2>2e-t_1$,即 $t_1+t_2>2e$, ……………………… 11 分

所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>2e$. ……………………………………………… 12 分

评分细则:

【1】第一问,写出 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,得 1 分,写出 $f(x)$ 有两个零点的等价条件累计得 2 分,算出 $g'(x)=\frac{-\ln x-1}{x^2}$,并得出 $g(x)$ 的单调区间累计得 3 分,求出参数 $m$ 的取值范围,累计得 5 分.

【2】第二问,写出 $2t_1-t_1\ln t_1=2t_2-t_2\ln t_2$,累计得 6 分,写出 $0<t_1<e<t_2$,累计得 7 分,推出 $H(t)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增,累计得 9 分,推出 $h(t_2)<h(2e-t_1)$,累计得 10 分,直到证出所要求证的不等式,累计得 12 分.

【3】采用其他方法,参照本评分标准依步骤给分.

22. 解:(1)曲线 $C$ 的普通方程为 $(x+1)^2+y^2=4$. ……………………………………… 2 分

由 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$,得 $\rho\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\rho\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$,即 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=2$,

因为 $x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$,所以直线 $l$ 的直角坐标方程为 $x+y-2=0$. ……………… 4 分

(2)因为直线 $l$ 的斜率为 $-1$,所以 $l$ 的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$,

所以过点 $M(-2,1)$ 且与直线 $l$ 平行的直线 $l'$ 的方程可设为 $\begin{cases}x=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ ($t$ 为参数). ……………… 6 分

设点 $A,B$ 对应的参数分别为 $t_1,t_2$，将 $\begin{cases} x=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ 代入 $(x+1)^2+y^2=4$，可得 $(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2+(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2$

$=4$，整理得 $t^2+2\sqrt{2}t-2=0$，则 $\Delta>0$，$t_1+t_2=-2\sqrt{2}$，$t_1t_2=-2$． ………………………… 8 分

所以 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{|MA|+|MB|}{|MA||MB|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{(-2\sqrt{2})^2+4\times 2}}{2}=2$． ………………………… 10 分

评分细则：

【1】第一问，圆的方程没有写成标准方程，不扣分，累计得 2 分，写出直线 $l$ 的方程，不管哪种形式，不扣分，累计得 4 分．

【2】第二问，写出直线 $l'$ 的参数方程，累计得 6 分，联立方程组并写出 $t_1+t_2=-2\sqrt{2}$，$t_1t_2=-2$，累计得 8 分，求出 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=2$，累计得 10 分．

23．证明：(1)由已知可得 $3=4a^2+b^2+16c^2+(4a^2+b^2)+(4a^2+16c^2)+(b^2+16c^2)\geqslant 4a^2+b^2+16c^2+4ab+16ac+8bc=(2a+b+4c)^2$， ………………………… 3 分

当且仅当 $2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立． ………………………… 4 分

又 $a,b,c$ 均为正数，所以 $2a+b+4c\leqslant\sqrt{3}$． ………………………… 5 分

(2)因为 $(2a)^2+b^2+(4c)^2\geqslant 3\sqrt[3]{(2a)^2b^2(4c)^2}$，

当且仅当 $2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立， ………………………… 7 分

所以 $3\times 4\sqrt[3]{(abc)^2}\leqslant 1$，整理得 $(abc)^2\leqslant(\frac{1}{12})^3$， ………………………… 8 分

所以 $\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{16c^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{16c^2}}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}\geqslant\frac{3}{4}\sqrt[3]{12^3}=9$，

当且仅当 $2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立． ………………………… 10 分

评分细则：

(证法二)证明：(1)由柯西不等式得 $[(2a)^2+b^2+(4c)^2](1^2+1^2+1^2)\geqslant(2a+b+4c)^2$， ………………………… 3 分

所以 $(2a+b+4c)^2\leqslant 3$． ………………………… 4 分

因为 $a,b,c$ 均为正数，所以 $2a+b+4c\leqslant\sqrt{3}$（当且仅当 $2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立）． ………………………… 5 分

(2) $(\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{16c^2})(4a^2+b^2+16c^2)$

$=1+1+1+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{16c^2}{4a^2}+\frac{4a^2}{b^2}+\frac{16c^2}{b^2}+\frac{4a^2}{16c^2}+\frac{b^2}{16c^2}$ ………………………… 7 分

$=3+(\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4a^2}{b^2})+(\frac{16c^2}{4a^2}+\frac{4a^2}{16c^2})+(\frac{16c^2}{b^2}+\frac{b^2}{16c^2})$ ………………………… 8 分

$\geqslant 3+2\sqrt{\frac{b}{2a}\cdot\frac{2a}{b}}+2\sqrt{\frac{4c}{2a}\cdot\frac{2a}{4c}}+2\sqrt{\frac{4c}{b}\cdot\frac{b}{4c}}=9$，

当且仅当 $2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立． ………………………… 10 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。