数学参考答案

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. D. 2. B **3. C**

4. D【解析】因为 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，所以 $PB\perp PC$，

因为 $PO\perp BC$，所以 $\triangle POC\backsim\triangle BOP$，所以 $\dfrac{PO}{OB}=\dfrac{OC}{PO}$，所以 $PO^2=OB\cdot OC$，

因为 $BO=16\text{m}$， $PO=12\text{m}$，所以 $OC=9\text{m}$，

设 M， N 分别为 AB,CD 的中点，

因为 $\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)=2\overrightarrow{PO}$，

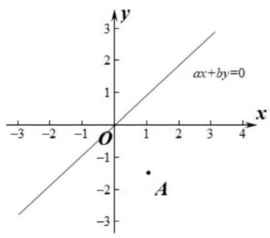
所以 $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}=2\overrightarrow{PO}$，所以 O 为 MN 的中点，

因为 $AB=8\text{m}$， $BO=16\text{m}$，所以 $OM=20\text{m}$，

所以 $ON=20\text{m}$，所以 $CN=ON-OC=20-9=11\text{m}$，所以 $CD=2CN=22\text{m}$

5. A【详解】根据题意，设直线 l： $ax+by=0$，设点 $A\left(1,-\sqrt{3}\right)$

那么点 $A\left(1,-\sqrt{3}\right)$ 到直线 l 的距离为： $d=\dfrac{\left|a-\sqrt{3}b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，



因为 $a>0,b<0$，所以 $d=\dfrac{a-\sqrt{3}b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，且直线 l 的斜率 $k=-\dfrac{a}{b}>0$，

当直线 l 的斜率不存在时， $d=\dfrac{a-\sqrt{3}b}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$，所以 $d>1$，

当 $OA\perp l$ 时， $d_{\max}=|OA|=\sqrt{1+3}=2$，

所以 $1<d\le 2$，即 $1<\dfrac{a-\sqrt{3}b}{\sqrt{a^2+b^2}}\le 2$，

因为 $\dfrac{\sqrt{3}b-a}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\dfrac{a-\sqrt{3}b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，所以 $-2\le\dfrac{\sqrt{3}b-a}{\sqrt{a^2+b^2}}<-1$，

6. A【解答】方法一（特殊化））

解： $f(2x+1)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，取 $f(x)=2\sin(\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{6})$ 关于 $x=1$ 对称，

$$f(x)+f(x+2)=2\sin(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6})+2\sin\left[\frac{\pi}{3}(x+2)+\frac{\pi}{6}\right]$$

$$=2\left[\sin(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6})+\sin(\frac{\pi}{3}x+\frac{5}{6}\pi)\right]$$

$$=2\left[\sin\frac{\pi}{3}x\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}x\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}x\cos\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}x\sin\frac{5}{6}\pi\right]=2\cos\frac{1}{3}\pi x.$$

$f(x+1)=2\sin(\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{2})=2\cos\dfrac{1}{3}\pi x$，$\therefore f(x+1)=f(x)+f(x+2)$，

即 $f(x)=2\sin(\dfrac{1}{3}\pi x+\dfrac{\pi}{6})$ 满足条件， $f(18)=2\sin(6\pi+\dfrac{\pi}{6})=1.$

方法二（略）

7. A【详解】设切点为 $(x_0,f(x_0))$， $f'(x)=3x^2+12x+9$， $f'(x_0)=3x_0^2+12x_0+9$，

所以切线方程为 $y-(x_0^3+6x_0^2+9x_0+11)=(3x_0^2+12x_0+9)(x-x_0)$，

由$\begin{cases} y=x^3+6x^2+9x+11 \\ y-(x_0^3+6x_0^2+9x_0+11)=(3x_0^2+12x_0+9)(x-x_0) \end{cases}$，

得$x^3+6x^2+9x+11-(x_0^3+6x_0^2+9x_0+11)=(3x_0^2+12x_0+9)(x-x_0)$，

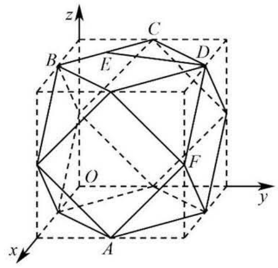
整理得$(x-x_0)^2(x+2x_0+6)=0$，

切线$g(x)=kx+b$与$f(x)$的图象有且仅有一个交点，所以$x_0=-2x_0-6$，$x_0=-2$，

所以切线方程为$y=-3x+3$，所以$k=-3,b=3$，

8. C

【解析】将半正多面体补成正方体，建立如图所示的空间直角坐标系.



因为半正多面体的棱长为$\sqrt{2}$，故正方体的棱长为2.

所以$A(2,1,0),F(2,2,1)$，

$B(1,0,2),C(0,1,2),D(1,2,2),\overrightarrow{AF}=(0,1,1),\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$.

设$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}=(-\lambda,\lambda,0),\lambda\in[0,1]$，则

$E(1-\lambda,\lambda,2),\overrightarrow{DE}=(-\lambda,\lambda-2,0)$.

所以

$$\cos\langle\overrightarrow{AF},\overrightarrow{DE}\rangle=\frac{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{AF}||\overrightarrow{DE}|}=\frac{\lambda-2}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+(\lambda-2)^2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-2)^2}{(\lambda-2)^2+2(\lambda-2)+2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{\lambda-2}+\frac{2}{(\lambda-2)^2}}}.$$

令$t=\frac{1}{\lambda-2}\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$，则$\cos\langle\overrightarrow{AF},\overrightarrow{DE}\rangle=-\frac{1}{2\sqrt{2t^2+2t+1}}$，

因为$2t^2+2t+1\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，所以$\cos\langle\overrightarrow{AF},\overrightarrow{DE}\rangle\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right]$.

故直线DE与直线AF所成角的余弦值的取值范围为$\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

9.BD【详解】解：对于A，因为$P(A)=0.5$，$P(B)=0.2$，$B\subseteq A$，

所以$P(AB)=P(B)=0.2$，故错误；

对于B，因为A与B互斥，所以$P(A+B)=P(A)+P(B)=0.5+0.2=0.7$，故正确；

对于C，因为$P(B)=0.2$，所以$P(\overline{B})=1-0.2=0.8$，所以$P(A\overline{B})=0.5\times0.8=0.4$，故错误；

对于D，因为$P(B|A)=0.2$，即$\frac{P(AB)}{P(A)}=0.2$，所以$P(AB)=0.2\times P(A)=0.1$，

又因为$P(A)\times P(B)=0.5\times0.2=0.1$，所以$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，

所以A与B相互独立，故正确.

10. BCD 解：对于A，由随机变量X的概率密度函数为$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$可得

$\mu=b,\sigma^2=a^2$，

所以随机变量X服从正态分布，$X\sim N(b,a^2)$，故A错误；

对于B，因为二次函数$y=-\frac{(x-b)^2}{2a^2}$在$(-\infty,b)$上单调递增，在$(b,+\infty)$上单调递减，

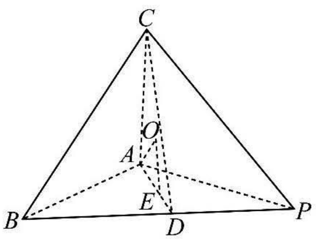
由函数$y=e^x$在R上单调递增，根据复合函数的单调性可得$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$ $(a>0,b>0)$

在 $(-\infty,b)$ 上单调递增，在 $(b,+\infty)$ 上单调递减，
所以 $\varphi(x)$ 的极大值点为 $x=b$ ，所以 $2a=b$,所以随机变量 X 服从正态分布， $X\sim N(2a,a^2)$ ，
故 B 正确；
对于 C，因为 $f(a)=P(X<a)$， $g(2a)=P(X>3a)$，又 $a+3a=2\times 2a$，
所以 $P(X<a)=P(X>3a)$，即 $f(a)=g(2a)$，故 C 正确；
对于 D，因为 $f(2a)=P(X<2a)=\dfrac{1}{2}$， $g(a)=P(X>2a)=\dfrac{1}{2}$，
所以 $f(2a)+g(2a)=\dfrac{1}{2}+f(a)=g(a)+f(a)$，故 D 正确.

11. BCD 解：存在量词命题的否定方法是先改变量词，然后否定结论，
$\therefore$ 命题：“$\exists x\ldots 0,x^3-x-1\ldots 0$”的否定是“$\forall x\ldots 0,x^3-x-1<0$”，
故选 A 错

$$\frac{cos^2 5^\circ-sin^2 5^\circ}{\sin 40^\circ\sin 50^\circ}=\frac{\cos 10^\circ}{\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{\cos 10^\circ}{\frac{1}{2}\sin 80^\circ}=\frac{\sin 80^\circ}{\frac{1}{2}\sin 80^\circ}=2.$$ 故 B 正确；

$C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+2^3C_n^3+\cdots+2^nC_n^n=(1+2)^n=3^n$，故 C 正确；
.如图所示，



由 $PA=AB=PB=AC=2\sqrt{3}$， $CP=2\sqrt{6}$，得 $PA\perp AC$,由 D 是 PB 的中点， $PA=AB=PB=2\sqrt{3}$，解得 $AD=3$，又 $CD=\sqrt{21}$，所以 $CA^2+AD^2=CD^2$，得 $CA\perp AD$，又 $AD\cap AP=A$， $AP,AD\subset$ 平面 PAB 所以 $AC\perp$ 平面 PAB .设球心为 O ,点 O 到底面 PAB 的距离为 $d=\dfrac{1}{2}AC=\sqrt{3}$,由正弦定理得 $\triangle PAB$ 的外接圆半径 $r=\dfrac{PA}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$ ，在三角形 OAE 中，球 O 的半径 $OA=R=\sqrt{d^2+r^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{7}$,所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球 O 的体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{7}\right)^3=\dfrac{28\sqrt{7}\pi}{3}$.故 D 正确；

12. BCD;【解析】对于 A 当 $a=b$ 时，函数 $f(x)$ 定义域为 R 关于原点对称
$f(-x)=ae^{-x}+be^{x}=f(x)$，故函数 $f(x)$ 为偶函数，
当函数 $f(x)$ 为偶函数时， $f(x)-f(-x)=0$ 故 $(a-b)e^x+(b-a)e^{-x}=0$
$(a-b)e^{2x}=(a-b)$，又因为 $f(x)$ 定义域为 R，所以 e^{2x} 不为1，故 $a=b$
所以 $a=b$ 是函数 $f(x)$ 为偶函数的充要条件，故①错误.
对于 B 当 $a+b=0$ 时，函数 $f(x)$ 定义域为 R 关于原点对称 $f(x)+f(-x)=(a+b)e^x+(a+b)e^{-x}=0$，故函数 $f(x)$ 为奇函数
当函数 $f(x)$ 为奇函数时 $f(x)+f(-x)=(a+b)e^x+(a+b)e^{-x}=0$，因为 $e^x>0$， $e^{-x}>0$
故 $a+b=0$.所以 $a+b=0$ 是函数 $f(x)$ 为奇函数的充要条件，故②正确.
对于 C $f'(x)=ae^x-be^{-x}$ 因为 $ab<0$
若 $a>0,b<0$ 则 $f'(x)=ae^x-be^{-x}>0$ 恒成立，则 $f(x)$ 为单调递增函数，

若 $a<0,b>0$ 则 $f'(x)=ae^{x}-be^{-x}<0$ 恒成立，则 $f(x)$ 为单调递减函数，

故 $ab<0$，函数 $f(x)$ 为单调函数，故③正确.

对于 D $f'(x)=ae^{x}-be^{-x}=\dfrac{ae^{2x}-b}{e^{x}}$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{b}{a}$，又因为 $ab>0$

若 $a>0,b>0$

当 $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{b}{a}\right)$，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 为单调递减.

当 $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{b}{a}\right)$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 为单调递增.函数 $f(x)$ 存在唯一的极小值.

若 $a<0,b<0$

当 $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{b}{a}\right)$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 为单调递增.

当 $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{b}{a}\right)$，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 为单调递减.

故函数 $f(x)$ 存在唯一的极大值.所以函数存在极值点，故④正确.

故答案为：BCD；

13． $x=3$ 或 $3x+4y-1=0$ 解：将圆 C 方程化为圆的标准方程 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$，得圆心 $C(1,2)$，

当过点 $P(3,-2)$ 的直线斜率不存在时，直线方程为 $x=3$ 是圆 C 的切线，满足题意；

当过点 $P(3,-2)$ 的直线斜率存在时，可设直线方程为 $y+2=k(x-3)$，

利用圆心到直线的距离等于半径得 $\dfrac{|2k+4|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=-\dfrac{3}{4}$，

即此直线方程为 $3x+4y-1=0$，

故答案为： $x=3$ 或 $3x+4y-1=0$.

14. 28【解析】显然 a，b，c，d 均为不超过 5 的自然数，下面进行讨论.

最大数为 5 的情况：

① $25=5^2+0^2+0^2+0^2$，此时共有 $A_4^1=4$ 种情况；

最大数为 4 的情况：

② $25=4^2+3^2+0^2+0^2$，此时共有 $A_4^2=12$ 种情况；

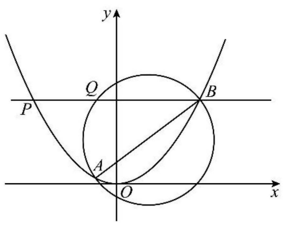
③ $25=4^2+2^2+2^2+1^2$，此时共有 $A_4^2=12$ 种情况.

当最大数为 3 时，$3^2+3^2+2^2+2^2>25>3^2+3^2+2^2+1^2$，故没有满足题意的情况.

综上，满足条件的有序数组 (a,b,c,d) 的个数是 $4+12+12=28$.

15. $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$【详解】如图，易知过点 A,B 且与直线 l 相切的圆就是以 AB 为直径的圆，设

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，



则 $Q(x_1,y_2),P(-x_2,y_2)$，由 $\overline{QB}=3\overline{PQ}$ 有 $x_2=-2x_1$，

设直线 AB 的方程为 $y=kx+1$，代入 $x^2=4y$ 有 $x^2-4kx-4=0$，

所以 $x_1+x_2=4k,x_1x_2=-4$，结合 $x_2=-2x_1$，得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

故答案为: $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

16. $P_1P_3+P_2P_3-P_1P_2P_3$

【详解】由题意，元件 a，b，c 不正常工作的概率分别为 $(1-P_1)$，$(1-P_2)$，$(1-P_3)$

电路正常工作的条件为T_1正常工作，T_2，T_3中至少有一个正常工作，

（1）若T_1，T_2，T_3接入的元件为a，b，c或a，c，b，

则此电路正常工作的概率是$P_1\cdot\left[1-\left(1-P_2\right)\left(1-P_3\right)\right]=P_1P_2+P_1P_3-P_1P_2P_3$；

（2）若T_1，T_2，T_3接入的元件为b，a，c或b，c，a，

则此电路正常工作的概率是$P_2\cdot\left[1-\left(1-P_1\right)\left(1-P_3\right)\right]=P_1P_2+P_2P_3-P_1P_2P_3$；

（3）若T_1，T_2，T_3接入的元件为c，a，b或c，b，a，

则此电路正常工作的概率是$P_3\cdot\left[1-\left(1-P_1\right)\left(1-P_2\right)\right]=P_1P_3+P_2P_3-P_1P_2P_3$

因为$0<P_1<P_2<P_3<1$，

所以$P_1P_2+P_1P_3-P_1P_2P_3<P_1P_2+P_2P_3-P_1P_2P_3<P_1P_3+P_2P_3-P_1P_2P_3$，

所以此电路正常工作的最大概率是$P_1P_3+P_2P_3-P_1P_2P_3$.

故答案为：$P_1P_3+P_2P_3-P_1P_2P_3$

17

解：(1) 根据函数图象可得$2A=3-(-1)=4$，

$\therefore A=2$，$3+(-1)=2B$，　$\therefore B=1$，

$\frac{T}{2}=\frac{11}{12}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{9}{12}\pi=\frac{3}{4}\pi$，

得$T=\frac{3}{2}\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore \omega=\frac{4}{3}$，　　3 分

又$\because f(\frac{\pi}{6})=3$，$\therefore 2\sin(\frac{4}{3}\times\frac{\pi}{6}+\varphi)+1=3$，$\therefore \sin(\frac{2}{9}\pi+\varphi)=1$，

$\therefore \frac{2}{9}\pi+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，

又$\because|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\frac{5}{18}\pi$，

$\therefore f(x)=2\sin(\frac{4}{3}x+\frac{5}{18}\pi)+1$；　　6 分

(2) 把$y=f(x)$的图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{2}{3}$(纵坐标不变)得到

$y=2\sin(2x+\frac{5}{18}\pi)+1$，再向下平移一个单位得到$y=2\sin(2x+\frac{5}{18}\pi)$，再向左平移$\frac{\pi}{36}$个

单位得到$y=2\sin[2(x+\frac{\pi}{36})+\frac{5}{18}\pi]=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，　　9 分

$\therefore g(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，$\frac{\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4}{3}\pi$，

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin(2x+\frac{\pi}{3})\leqslant 1$，

$\therefore g(x)\in[-\sqrt{3},2]$，即$g(x)$值域为$[-\sqrt{3},2]$.　　12 分

18. 解：(1) 由题意可得：$a_n=4+n-1=n+3$，$a_n+b_n=(4-2)\times2^{n-1}=2^n$.

$\therefore b_n=2^n-n-3$.　　4 分

(2) $\because b_{n+1}-b_n=2^{n+1}-(n+1)-3-(2^n-n-3)=2^n-1\ldots 1>0$，$n\in N^*$，

$\therefore b_{n+1}>b_n$，$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 单调递增，　　　　6 分

$\because b_1=2-1-3=-2$，$b_2=2^2-2-3=-1$，$b_3=2^3-3-3=2$，$\therefore n\ldots 3$ 时，$b_n>0$，

$\therefore n=1$ 时，$T_1=2$；

$n=2$ 时，$T_2=2+1=3$；

$n\ldots 3$ 时，$T_n=3+b_3+b_4+\ldots+b_n=3+(2^3+2^4+\ldots+2^n)-[6+7+\ldots+(n+3)]$

$$=3+\frac{8(1-2^{n-2})}{1-2}-\frac{(n-2)(6+n+3)}{2}$$

$$=2^{n+1}-5-\frac{(n-2)(n+9)}{2}.$$

$$\therefore T_n=\begin{cases}2,n=1\\ 2^{n+1}-5-\dfrac{(n-2)(n+9)}{2},n\ldots 2\end{cases}.$$　　　　12 分

19. 解：(1) 设甲至多经过两局比赛晋级决赛为事件 A，

则甲第一局获胜或第一局平局第二局获胜，则 $P(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.　　3 分

(2) 记乙恰好经过一局、两局、三局比赛晋级决赛分别为事件 B，C，D，

则 $P(B)=1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})=\frac{1}{6}$，

$P(C)=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6})=\frac{1}{4}$，

$P(D)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times(1-\frac{1}{3})=\frac{1}{18}$，　　　　9 分

故在乙最后晋级决赛的前提下，乙恰好经过三局比赛才晋级决赛的概率为 $\dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{18}}=\dfrac{2}{17}$

12 分

20.

(I) 证明：因为 $PD\perp$ 矩形 $ABCD$，所以 $PD\perp BC$，

由底面 $ABCD$ 为长方形，有 $BC\perp CD$，而 $PD\cap CD=D$，

所以 $BC\perp$ 平面 PCD. 而 $DE\subset$ 平面 PCD，所以 $BC\perp DE$.

又因为 $PD=CD$，点 E 是 PC 的中点，所以 $DE\perp PC$.

而 $PC\cap BC=C$，所以 $DE\perp$ 平面 PBC. 而 $PB\subset$ 平面 PBC，所以 $PB\perp DE$.

又 $PB\perp EF$，$DE\cap EF=E$，所以 $PB\perp$ 平面 DEF.

所以 $PB\perp DF$ 得证.　　　　4 分

(II) 如图，以 D 为原点，射线 DA,DC,DP 分别为 x,y,z 轴的正半轴，建立空间直角坐标系．5 分

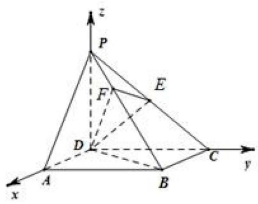
因为 $PD=DC=1$，设 $BC=\lambda$，则 $D(0,0,0),P(0,0,1),B(\lambda,1,0),C(0,1,0)$，

$\overrightarrow{PB}=(\lambda,1,-1)$，点 E 是 PC 的中点，所以 $E(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

由 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\overrightarrow{DP}=(0,0,1)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量；6 分

由 (I) 知，$PB\perp$ 平面 DEF，所以 $\overrightarrow{BP}=(-\lambda,-1,1)$ 是平面 DEF 的一个法向量.　　　　8 分

若平面 DEF 与平面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$，



则 $\cos\frac{\pi}{3}=\left|\frac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DP}}{\left|\overrightarrow{BP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DP}\right|}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+2}}\right|=\frac{1}{2}$，解得 $\lambda=\sqrt{2}$.　　**10 分**

所以 $PB=2,PF=\frac{1}{2}=\frac{1}{4}PB$，

$V_{P-DEF}=V_{F-PDE}=\frac{1}{4}V_{B-PDE}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{48}$.　　**12 分**

21　（1）设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$(a>0,b>0)$

由题意知 $\begin{cases}c=\sqrt{6}\\ \frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1\\ a^2+b^2=6\end{cases}$，解之得 $\begin{cases}a=\sqrt{3}\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$，∴双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$　**3 分**

（2）设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，A（x_1、y_1），B（x_2，y_2），P（2，－1）

$\begin{cases}y=kx+m\\ x^2-y^2=3\end{cases}$，整理得 $\left(1-k^2\right)x^2-2kmx-m^2-3=0$，

则 $1-k^2\neq0$，$\Delta>0$，$x_1+x_2=\frac{2km}{1-k^2}$，$x_1x_2=\frac{-m^2-3}{1-k^2}$　　**5 分**

∴直线 PA 方程为 $y=\frac{y_1+1}{x_1-2}(x-2)-1$，

令 $x=0$，则 $M\left(0,\frac{x_1+2y_1}{2-x_1}\right)$，同理 N（0，$\frac{x_2+2y_2}{2-x_2}$），　　**7 分**

由 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$，可得 $\frac{x_2+2y_1}{2-x_1}+\frac{x_2+2y_2}{2-x_2}=0$

∴ $\frac{x_1+2\left(kx_1+m\right)}{2-x_1}+\frac{x_2+2\left(kx_2+m\right)}{2-x_2}=0$

$\left[(2k+1)x_1+2m\right](2-x_2)+\left[(2k+1)x_2+2m\right](2-x_1)=0$

∴ $(4k+2-2m)(x_1+x_2)-(4k+2)x_1x_2+8m=0$

∴ $(4k-2m+2)\cdot\frac{2km}{1-k^2}-(4k+2)\frac{-m^2-3}{1-k^2}+8m=0$

∴ $(2k-m+1)\cdot2km+(2k+1)\left(m^2+3\right)+4m\left(1-k^2\right)=0$

∴ $4k^2m-2km^2+2km+2km^2+6k+m^2+3+4m-4mk^2=0$

∴ $m^2+(2k+4)m+6k+3=0$，$(m+3)(m+2k+1)=0$　　**10 分**

当 $m+2k+1=0$ 时，$m=-2k-1$，

此时直线 AB 方程为 $y=k(x-2)-1$ 恒过定点 P（2，－1），显然不可能

∴ $m=-3$，直线 AB 方程为 $y=kx-3$ 恒过定点 E（0，－3）

∵ $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，∴ $PQ\perp AB$，取 PE 中点 T，∴ T（1，－2）

∴ $|QT|=\frac{1}{2}|PE|=\sqrt{2}$ 为定值，∴存在 T（1，－2）使 $|QT|$ 为定值 $\sqrt{2}$．**12 分**

22.

【详解】（1）①依题意，$g(x)=\frac{1}{2}x^2-x-k\sin x$，求导得：$g'(x)=x-1-k\cos x$，

令$t(x)=x-1-k\cos x$，则$t'(x)=1+k\sin x\geq 1-k\geq 0$，函数$t(x)$即$g'(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，

又$g'(1)=-k\cos 1<0, g'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-1>0$，则存在$x_0\in(1,\frac{\pi}{2})$，使得$g'(x_0)=0$，

且当$x\in(-\infty,x_0)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，当$x\in(x_0,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

所以x_0为$g(x)$的唯一极小值点．　　　　　　**3分**

②由①知，$g'(x_0)=0$，即$x_0=k\cos x_0+1$，$x_0\in(1,\frac{\pi}{2})$，

则$g(x_0)=\frac{1}{2}x_0(k\cos x_0+1)-x_0-k\sin x_0=\frac{1}{2}x_0(k\cos x_0-1)-k\sin x_0, 0<k\leq 1$，

因此，要证$g(x_0)<-\frac{1}{2}x_0$，只需证$k(\frac{1}{2}x_0\cos x_0-\sin x_0)<0$，即证$\frac{1}{2}x_0\cos x_0-\sin x_0<0$，

因为$1<x_0<\frac{\pi}{2}, \cos x_0>0$，从而只需证$\frac{\pi}{4}\cos x_0<\sin x_0$，即$\frac{\pi}{4}<\tan x_0$，而

$\tan x_0>\tan 1>\tan\frac{\pi}{4}=1>\frac{\pi}{4}$，

所以$g(x_0)<-\frac{1}{2}x_0$．　　　　　　**7分**

（2）依题意，$f(x)=x+\sin x$，求导得：$f'(x)=1+\cos x$，

则函数$f(x)$在点$(x_1,f(x_1))$处的切线l的方程为$y=(1+\cos x_1)x+\sin x_1-x_1\cos x_1$，

若直线l恰好与曲线$f(x)$相切且有无穷多个切点，任取两个不同的切点$A(a,f(a)),B(b,f(b))$，

则在此两点处的切线为同一直线，即$\begin{cases}1+\cos a=1+\cos b\\ \sin a-a\cos a=\sin b-b\cos b\end{cases}$，

于是有$\cos a=\cos b$，则$\sin a=\sin b$或$\sin a=-\sin b$，

若$\sin a=\sin b$，从而得：$(a-b)\cos a=0$，显然$a-b\neq 0$，则$\cos a=0$，

若$\sin a=-\sin b$，取异于A，B外的另一个切点$C(c,f(c))$，

则有$\cos a=\cos b=\cos c$，$\sin a-a\cos a=\sin b-b\cos b=\sin c-c\cos c$，

如果$\sin a=\sin c$，则有$\cos a=0$，如果$\sin a=-\sin c$，则$\sin b=\sin c$，因此$\cos b=\cos c=\cos a=0$，

从而恒有$\cos a=0$，即$\sin a=\pm 1$，于是得直线l的方程为$x-y+1=0$或$x-y-1=0$，

当切线方程为$x-y+1=0$时，切点为$(2m\pi+\frac{\pi}{2}, 2m\pi+\frac{\pi}{2}+1), m\in Z$，

当切线方程为$x-y-1=0$时，切点为$(2n\pi-\frac{\pi}{2}, 2n\pi-\frac{\pi}{2}-1), n\in Z$，

所以直线l的方程为$x-y+1=0$或$x-y-1=0$．　　　　　　**12分**

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。