2020 年第三届刘徽杯数学竞赛

试题参考答案

第一天试题

第一题

第三届刘徽杯第一天第1题解答

叶 中 豪

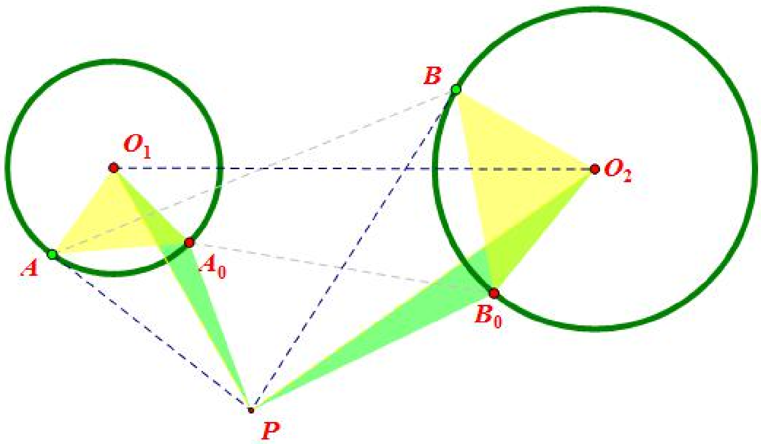
第1题 平面上有不相等的两圆，当两个动点A和B分别沿两圆按逆时针方向作相同角速度的运动时，求证：

(1) 平面上存在一个定点P，使得$\triangle PAB$的形状始终保持不变；

(2) 平面上存在一个定点Q，使得$\triangle QAB$的面积始终保持不变.

【证明】

(1) 记两圆的圆心分别为O_1, O_2，又设A_0, B_0是动点A, B在运动中某一时刻的位置.

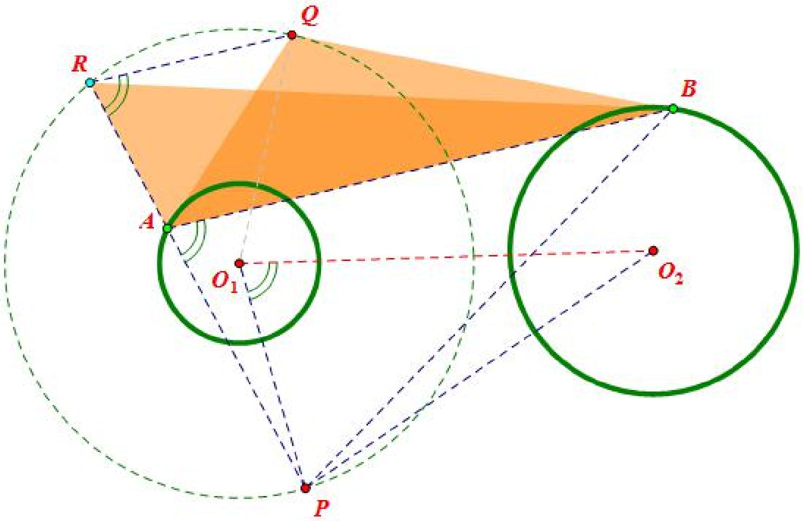


建立复平面并以各点的字母表示该点所对应的复数. 由复数法易说明平面上存在一点 P, 使得$\triangle PO_1A_0 \backsim \triangle PO_2B_0$:

$$\frac{P-O_1}{A_0-O_1}=\frac{P-O_2}{B_0-O_2}, \quad \therefore \quad P=\frac{O_1\times B_0-O_2\times A_0}{O_1+B_0-O_2-A_0}.$$

对于A, B的其它任意位置, 由于总成立$\triangle AO_1A_0 \backsim \triangle BO_2B_0$, 表明$\triangle PAA_0$与$\triangle PBB_0$也彼此相似, 再由旋转型相似关系即可得: $\triangle PAB \backsim \triangle PA_0B_0 \backsim \triangle PO_1O_2$.

(2) 取 P 关于连心线 O_1O_2 的对称点 Q，下面证明△QAB 的面积为定值.



以 O_1 为圆心作过经过 P, Q 两点的圆，延长 PA 交此圆于 R，联 RQ. 因

$$\angle PRQ=\angle PO_1Q=2\angle PO_1O_2=\angle PAB(\text{用到}\triangle PAB\backsim\triangle PO_1O_2),$$

得 $RQ /\!/ AB$，于是，可作等积变形：

$$S_{\triangle QAB}=S_{\triangle RAB}=\frac{1}{2}AB\times AR\sin\angle PAB;$$

而

$$AB=\frac{PA}{AB}\times PA=PA\times\frac{O_1P}{O_1O_2},\quad \angle PAB=\angle PO_1O_2.$$

再由圆幂公式知 $PA\times AR=O_1P^2-O_1A^2$.

$$\therefore\ S_{\triangle QAB}=\frac{1}{2}AB\times AR\sin\angle PAB$$

$$=\frac{1}{2}PA\times AR\times\frac{O_1P}{O_1O_2}\sin\angle PO_1O_2$$

$$=\frac{O_1P^2-O_1A^2}{2}\times\frac{O_1P}{O_1O_2}\sin\angle PO_1O_2=\text{定值}.$$

证毕.

第二题

解答褚小光、田开斌

例 2. 设$n\ge 2$的正整数，已知$a_i\in(0,1]$，$1\le i\le C_{n+1}^2$．求使不等式

$$\sqrt{\frac{C_{n+1}^2}{\sum_{i=1}^{C_{n+1}^2}a_i}}\ge 1+\lambda\prod_{i=1}^{C_{n+1}^2}(1-a_i)\cdots\cdots(1)$$

成立的最大的λ

证明 显然当$a_i=1$时等号成立，当$a_i=\frac{1}{n^2}$时，$\lambda=\frac{n-1}{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{C_{n+1}^2}}=(n-1)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{C_{n+1}^2}$．

故只需证

$$\sqrt{\frac{C_{n+1}^2}{\sum_{i=1}^{C_{n+1}^2}a_i}}\ge 1+(n-1)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{C_{n+1}^2}\prod_{i=1}^{C_{n+1}^2}(1-a_i)\cdots\cdots(2)$$

由均值不等式，得

$$\prod_{i=1}^{C_{n+1}^2}(1-a_i)\le\left[\frac{\sum_{i=1}^{C_{n+1}^2}(1-a_i)}{C_{n+1}^2}\right]^{C_{n+1}^2}=\left[1-\frac{\sum_{i=1}^{C_{n+1}^2}a_i}{C_{n+1}^2}\right]^{C_{n+1}^2}\cdots\cdots(3)$$

当$a_1=a_2=\cdots=a_{C_{n+1}^2}$时，式(3)等号成立．据此，欲证(2)式只需证

$$\sqrt{\frac{C_{n+1}^2}{\sum_{i=1}^{C_{n+1}^2}a_i}}\ge 1+(n-1)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{C_{n+1}^2}\left[1-\frac{\sum_{i=1}^{C_{n+1}^2}a_i}{C_{n+1}^2}\right]^{C_{n+1}^2}\cdots\cdots(4)$$

设 $x>0$，记 $\sum_{i=1}^{C_{n+1}^2} a_i = C_{n+1}^2 x^2$，则 $0<x\le 1$. 式(4)转化为

$$\frac{1}{x}\ge 1+(n-1)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{C_{n+1}^2}\left[(1-x)(1+x)\right]^{C_{n+1}^2}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)\left[1-(n-1)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{C_{n+1}^2}x(1-x)^{C_{n+1}^2-1}(1+x)^{C_{n+1}^2}\right]\ge 0$$

因为 $1-x\ge 0$，此时 $a_i=1$ 时等号成立，故只需证

$$(n-1)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{C_{n+1}^2}x(1-x)^{C_{n+1}^2-1}(1+x)^{C_{n+1}^2}\le 1\cdots\cdots(5)$$

由均值不等式，得

$$(n-1)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{C_{n+1}^2}x(1-x)^{C_{n+1}^2-1}(1+x)^{C_{n+1}^2}$$

$$=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{A_{n+1}^2}\left[(n-1)x\right]\left[(1-x)^{C_{n+1}^2-1}\right]\left[\frac{n-1}{n+1}(1+x)\right]^{C_{n+1}^2}$$

$$\le\left(\frac{n}{n-1}\right)^{A_{n+1}^2}\left[\frac{(n-1)x+\left(C_{n+1}^2-1\right)(1-x)+C_{n+1}^2(1+x)\frac{n-1}{n+1}}{A_{n+1}^2}\right]^{A_{n+1}^2}$$

$$=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{A_{n+1}^2}\left[\frac{n^2-1}{A_{n+1}^2}\right]^{A_{n+1}^2}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{A_{n+1}^2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{A_{n+1}^2}=1$$

当 $a_i=1\Leftrightarrow x=1$ 或 $(n-1)x=(1-x)=\frac{n-1}{n+1}(1+x)\Rightarrow x=\frac{1}{n}\Leftrightarrow a_i=\frac{1}{n^2}$ 时等号成立.

第三题

说明

(1) 本题源自文献: Kaneko Atsushi, Kano Mikio. A balanced interval of two sets of points on a line. In Jin Akiyama, et al. eds: Combinatorial Geometry and Graph Theory. IJCCGGT 2003, LNCS 3330, 108-112, 2005.

(2) 供题时曾给出如下的特殊形式:

在一条直线上任选互不重合的 20 个红点及 40 个蓝点. 求所有可能的正整数 k, 使得无论上述各点如何分布, 在该直线上一定存在一个区间, 其内部恰含有 k 个红点及 $2k$ 个蓝点.

后与许康华老师交流, 觉得考一般形式更好些. 结果却不幸撞题(捂脸+尴尬).

(3) 试题发布当天中午, 许老师发截图给我, 说发现根源杯 2018 年 1 月试题考过此题. 不得不说这是一个非常大的遗憾, 在此之前我和许老师都没有发现这个问题. 之后我仔细阅读了截图内容, 推敲其解答, 对比两者之间的差别, 发现:

i) 因根源杯试题叙述是"当且仅当", 其充分性和必要性的指代并不明确. 因此其证明中充分性及必要性部分的内容与本题对应的部分正好相反. 本题中, 充分性应该证明若有不等式成立, 则必存在所要求的线段; 必要性应该证明若存在所要求的线段, 则不等式成立.

ii) 在根源杯的解答中, 两次简单地使用"类似地…"将引理 3 和 4 的有关内容一笔带过. 而其实在具体构造及论证中, 细节上还是有不少差别的(比如区间的开或闭, 区间的端点, 是否包括 $-\infty$及$+\infty$等), 需要分别具体地写出来才能算正确.

通过观察对上述两个问题处理的详细情况, 可以大体上区分考生是单纯抄答案还是独立仔细思考后写的解答.

第三届刘徽杯数学竞赛第 3 题参考解答

赵 力

第 3 题 设整数 n, m, k, h 满足 $1\le n\le m$，$1\le k\le n$，以及 $1\le h\le m$. 将互不重合的 n 个红点及 m 个蓝点排列在一条直线上. 证明：不论这 $n+m$ 个点的次序如何，该直线上总存在一段恰含有 k 个红点及 h 个蓝点的线段的充分必要条件是

$$\left(\left\lfloor \frac{n}{k+1}\right\rfloor+1\right)\cdot(h-1)<m<\left\lfloor \frac{n-1}{k-1}\right\rfloor\cdot(h+1).$$

其中 $\lfloor x\rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数，且当 $k=1$ 时上述不等式最右边的一项理解为 $+\infty$.

证明

令直线上所有红点构成集合 R，所有蓝点构成集合 B. 用 $|S|$ 表示集合 S 中元素的个数.

我们将 n 个红点与 m 个蓝点在直线上的一个分布 X 表示为

$$\{x_1\}\cup\{x_2\}\cup\cdots\cup\{x_{n+m}\},$$

其中 x_i 表示从左向右排列的第 i 个点（x_i 可为红色或蓝色).

但从另一方面，X 也可以表示成

$$R(1)\cup B(1)\cup\cdots\cup R(s)\cup B(s),$$

其中，$R(i)$, $B(i)$ 分别表示将 $R\cup B$ 自左向右划分成的相邻但不相交的第 i 个纯红点最大子集及第 i 个纯蓝点最大子集，$i\ge 1$. 这里，某些 $R(i)$, $B(i)$ 可能是空集(例如在 X 的两个端点处).

我们将通过以下 5 个引理来完成本题的证明.

引理 1. 如果 $m \le \left(\left\lfloor \dfrac{n}{k+1} \right\rfloor + 1\right) \cdot (h-1)$，则直线上存在一种 n 个红点与 m 个蓝点的分布 X，使得不存在恰含有 k 个红点及 h 个蓝点的线段.

引理 1 的证明

设 $t = \left\lfloor \dfrac{n}{k+1} \right\rfloor$，则由引理 1 条件，有 $m \le (t+1)(h-1)$.

构造一个 n 个红点与 m 个蓝点的分布 X 如下:

$$B(1) \cup R(1) \cup B(2) \cup R(2) \cup \cdots \cup B(t+1) \cup R(t+1),$$

其中

$$|B(i)| \le h-1,\ 1 \le i \le t+1,$$

$$|B(1) \cup \cdots \cup B(t+1)| = m;$$

$$|R(i)| = k+1,\ 1 \le i \le t,\ |R(t+1)| = n-(k+1)t \ge 0,$$

$$|R(1) \cup \cdots \cup R(t+1)| = n.$$

易见，此时 X 不存在恰含有 k 个红点及 h 个蓝点的线段. 这是因为每一个含有 h 个蓝点的线段必包含某个子集 $R(j)$，$1 \le j \le t$，亦即含有至少 $k+1$ 个红点.

引理 1 证毕.

引理 2. 如果 $m > \left(\left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor + 1\right) \cdot (h-1)$，则对直线上任何由 n 个红点与 m 个蓝点构成的分布 X，均存在一个恰含有 k 个红点及至少 h 个蓝点的线段.

引理 2 的证明

设 $t = \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor$，则 $n < (t+1)(k+1)$.

假设任意一个恰含有 k 个红点的线段含有至多 $h-1$ 个蓝点.

将 X 中的红点自左向右依次记为 $r_1, r_2, \cdots, r_n$. 设 $I(i, j)$ 表示直线上以 r_i, r_j 所在位置为端点的开区间 (r_i, r_j)，$1 \le i < j \le n$. $B(i, j)$ 表示位于 $I(i, j)$ 内的蓝点的集合，$B(-\infty, i)$ 表示位于开区间 $(-\infty, r_i)$ 内的蓝点的集合，$B(i, +\infty)$ 表示位于开区间 $(r_i, +\infty)$ 内的蓝点的集合.

对任意整数 $1 \le s \le t-1$，开区间 $I(s(k+1), (s+1)(k+1))$ 恰含有 k 个红点:

$$\{r_j \mid s(k+1)+1 \le j \le (s+1)(k+1)-1\}.$$

由假设，有

$$|B(s(k+1), (s+1)(k+1))| \le h-1.$$

类似地，开区间 $(-\infty, r_{k+1})$ 恰含有 k 个红点，故

$$|B(-\infty, k+1)| \le h-1.$$

因 $n < (t+1)(k+1)$，故开区间 $I(t(k+1), +\infty)$ 含有至多 k 个红点，于是

$$|B(t(k+1), +\infty)| \le h-1.$$

所以

$$|B| \le |B(-\infty, k+1) \cup B(k+1, 2(k+1)) \cup \cdots \cup B(t(k+1), +\infty)| \le (t+1)(h-1).$$

此与引理 2 的条件矛盾.

引理 2 证毕.

引理 3. 如果$k\ge 2$，且$m\ge\left\lfloor\dfrac{n-1}{k-1}\right\rfloor\cdot(h+1)$，则直线上存在一种 n 个红点与 m 个蓝点的分布 X, 使得不存在恰含有 k 个红点及 h 个蓝点的线段.

引理 3 的证明

设$t=\left\lfloor\dfrac{n-1}{k-1}\right\rfloor$，则$t(k-1)+1\le n\le(t+1)(k-1)$，由引理 3 条件，有$m\ge t(h+1)$.

构造一个 n 个红点与 m 个蓝点的分布 X 如下:

$$R(1)\cup B(1)\cup R(2)\cup B(2)\cup\ldots\cup R(t+1)\cup B(t+1),$$

其中

$$|R(i)|\le k-1,\ 1\le i\le t+1,$$

$$|R(1)\cup\cdots\cup R(t+1)|=n;$$

$$|B(i)|=h+1,\ 1\le i\le t,\ |B(t+1)|=m-(h+1)t\ge 0,$$

$$|B(1)\cup\cdots\cup B(t+1)|=m.$$

易见，此时 X 不存在恰含有 k 个红点及 h 个蓝点的线段. 这是因为每一个含有 k 个红点的线段必包含某个子集$B(j)$，$1\le j\le t$，亦即含有至少$h+1$个蓝点.

引理 3 证毕.

引理 4. 如果$k\ge 2$，且$m<\left\lfloor\dfrac{n-1}{k-1}\right\rfloor\cdot(h+1)$，则对直线上任何由 n 个红点与 m 个蓝点构成的分布 X, 均存在一个恰含有 k 个红点及至多 h 个蓝点的线段.

引理 4 的证明

设$t=\left\lfloor\dfrac{n-1}{k-1}\right\rfloor$，则$t(k-1)+1\le n$. 假设任意一个恰含有 k 个红点的线段含有至少$h+1$个蓝点.

将 X 中的红点自左向右依次记为 $r_1, r_2, \cdots, r_n$. 设 $I[i, j]$表示直线上以 r_i, r_j 所在位置为端点的闭区间$[r_i, r_j]$, $1 \le i < j \le n$. $B'(i, j)$表示位于 $I[i, j]$内的蓝点的集合.

对任意整数 $0 \le s \le t-2$, 闭区间 $I[k+s(k-1), k+(s+1)(k-1)]$ 恰含有 k 个红点:

$$\{r_j \mid k+s(k-1) \le j \le k+(s+1)(k-1)\}.$$

由假设, 有

$$|B'(k+s(k-1), k+(s+1)(k-1)| \ge h+1.$$

类似地, 有

$$|B'(1,k)| \ge h+1.$$

所以

$$|B| \ge |B'(1,k) \cup B'(k, k+(k-1)) \cup \cdots$$

$$\cup B'(k+(t-2)(k-1), k+(t-1)(k-1))| \ge t(h+1).$$

此与引理 4 的条件矛盾.

引理 4 证毕.

对直线上任何一种含 n 个红点与 m 个蓝点的分布, 易知直线上必定有一条线段, 其内恰只含有 1 个红点, 而不含蓝点. 因此, 引理 4 的结论其实对 $k=1$ 也成立(引理 4 条件中规定 $k\geq 2$, 只是为了使分母不等于 0).

引理 5. 考虑 n 个红点与 m 个蓝点在直线上的一个分布. 假设其中存在两个线段 I 和 J, 满足 I 恰含有 k 个红点及至多 h 个蓝点, 而 J 恰含有 k 个红点及至少 h 个蓝点. 则该直线上一定存在一个恰含有 k 个红点及 h 个蓝点的线段.

引理 5 的证明

如果 I 与 J 各自所包含的 k 个红点完全重合, 则 I 与 J 的差别仅在于各自线段两端蓝点的数目, 通过适当增减这些蓝点的数目, 即可得到引理 5 的结论.

以下假设 $I\cap R\neq J\cap R$, 其中 R 为直线上所有红点构成的集合. 不妨设线段 I 中最左边的红点位于线段 J 的左侧. 我们通过如下的操作移动线段 I:

i) 将位于 I 内最左边红点左侧的蓝点依次从 I 中去除, 直至 I 最左边红点的左侧无蓝点属于 I;

ii) 将位于 I 右侧的蓝点(原不属于 I)依次加入 I, 直至遇到 I 右侧的第一个红点为止;

iii) 此时, 将 I 内最左边的红点去除的同时, 将 I 右侧的第一个红点加入 I;

iv) 重复上述步骤 i)~iii), 直至线段 I 与 J 所包含的红点完全重合.

v) 对线段 I 两端与之相邻的蓝点进行逐个增减, 使之与线段 J 完全重合.

在上述每一步操作过程中, 线段 I 所包含的红点均保持为 k, 而所包含的蓝点变化量至多为 1. 故在此过程中, 一定会得到一个线段, 恰含有 k 个红点及 h 个蓝点.

引理 5 证毕.

综合引理 1~5 的结论, 即可知本题结论成立.

第二天试题

第四题

第 3 届刘徽杯第 4 题解答

陈 计

第 4 题 对正数a,b,c,d，有

$$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+d)^3+(d+a)^3\geq 8(a^2b+b^2c+c^2d+d^2a).$$

证明 以下$\sum$ 均为轮换对称求和. $\sum(a+b)^3\geq 8\sum a^2b$展开,

$$2\sum a^3+3\sum ab^2\geq 5\sum a^2b\Leftrightarrow\sum(b-a)(2b^2+5ab)\geq 0,$$

由于$\sum(a^3-b^3)=0$，从而等价于

$$\sum(b-a)(6b^2+15ab-7b^2-7ab-7a^2)\geq 0,$$

也就是

$$\sum(7a-b)(b-a)^2\geq 0\Leftrightarrow 3\sum(a+b)(b-a)^2\geq 4\sum(b-a)^3.$$

同时减去最小数，不等式左边变小，右边不变. 于是，不妨设其中一个为零，不等式变成

$$(a+b)^3+(b+c)^3+c^3+a^3\geq 8a^2b+8b^2c,$$

可以看作c的三次函数，取最值时候可以用b表示. 然后，不等式变为a,b的齐次不等式，令$t=\dfrac{a}{b}$，得到的仍是一个关于t的三次函数.

第五题

第三届刘徽杯第五题参考解答

吴宇培

首先，本人对离散介值定理和估计密度这两个思想方法实在是太太太太有情怀了（细节原因就不多说了嗷，应该也算公开的），于是就是下面这个套路满满的题：

第5题. 给定正整数$n>2$，设集合$S=\{x^n+2021y^n: x,y\in\mathbb{Z}_+\}$，证明：对任意的正整数$k$，都存在正整数$m_k$，使得对任意的正整数$c>m_k$，都存在连续$c$个正整数，其中恰有$k$个数属于$S$.

Proof: 对任意的正整数k，取$m_k=k^n$，则对任意的正整数$c>m_k$，用$f_c(x)$表示在$x+1,x+2,\cdots,x+c$之中属于S的正整数的个数($x\in\mathbb{Z}_+$). 注意到$f_c(2021)\geq[\sqrt[n]{c}]>k$，$f_c(x+1)-f_c(x)\in\{1,-1,0\}$，那么，若我们能证明$f_c$可以取0，则结合$f_c(2021)>k$和$f_c(x+1)-f_c(x)\in\{1,-1,0\}$，根据离散的介值定理可以得到$f_c$取遍$[1,k]$中的所有正整数.

现在只要证：存在正整数x，使得$f_c(x)=0$.

若f_c不取0，即：对于正整数x，都有$f_c(x)\geq 1$. 我们考察充分大的正整数M：一方面，由假设可得$|S\cap[1,M]|\geq\frac{M}{c}-1$；另一方面，我们设$T_i=\{x\in\mathbb{Z}_+: x^i\leq M\}$，显然有$|T_n|\leq\sqrt[n]{M}$，所以

$$|S\cap[1,M]|\leq M^{\frac{2}{n}}\leq M^{\frac{2}{3}}<\frac{M}{c}-1\leq|S\cap[1,M]|, M\to+\infty,$$

矛盾.

证毕.

评分:

1. 比较密度是关键，f_c不取0可以推出$\frac{1}{c}$的密度给2分，S在正整数里的密度是0的证明给2分；

2. 比较密度证明能取0，再正确使用离散介值定理，给3分. 共计7分.

注: 对于想用离散介值定理但只验证相邻两项差的解答可得1分.

第六题

第 3 届刘徽杯第 6 题解答

许 康 华

第 6 题 对整数$k>1$, 记$f(k)$是将k分解为大于1的正整数之积的分解方法数(不计乘积中因子的次序, 例如$f(12)=4$, 因为12 有如下 4 种分解: $12, 2\times6, 3\times4, 2\times2\times3$).

若n是大于 1 的整数, $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$, 其中$p_1,p_2,\cdots,p_k$是不同的素数, $m_1,m_2,\cdots,m_k$是正整数, 且$m_1\ge m_2\ge\cdots\ge m_k$, 令$\alpha=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2},\beta=\dfrac{2\alpha-1}{\alpha-1}$, 则

$$f(n)\le\alpha^{m_1}\beta^{m_2}(\beta+1)^{m_3}\cdots(\beta+k-2)^{m_k}. \quad ①$$

解答 先证明一个引理

引理 设$n=\prod_{i=1}^{t}p_i^{\alpha_i},n_1=\dfrac{np_{t+1}}{p_t},p_1<p_2<\cdots<p_t<p_{t+1}$, 则$f(n)\le f(n_1)$.

证明 记$T(n)$为将n分解为大于1的正整数之积的所有分解式的集合，并且我们把这些分解式中的每一个也写成集合的形式，则$\varphi\in T(n)$将是一个乘积等于n的大于 1 的整数的多重集$\varphi=\{m_1,m_2,\cdots,m_s\}$，其中$n=m_1m_2\cdots m_s$.我们作$T(n)$到$T(n_1)$的映射$g$如下：对任意

$$\varphi\in T(n_1),\varphi=\{m_1,m_2,\cdots,m_s\},n=\prod_{i=1}^{s}m_i,$$

令 $g(\varphi)=\left\{m_1,m_2,\cdots,\dfrac{m_k p_{t+1}}{p_t},\cdots,m_s\right\}$，其中，$m_k=\max\limits_{p_t|m_i}\{m_i\}$，显然$g(\varphi)\in T(n_1)$由$\varphi$唯一确定，又对任意$\varphi_1\in T(n),\varphi_2\in T(n)$，

$$\varphi_1=\{m_1',m_2',\cdots,m_s'\},\ \varphi_2=\{m_1',m_2',\cdots,m_r'\},$$

若$g(\varphi_1)=g(\varphi_2)$，即

$$\{m_1',m_2',\cdots,\frac{m_k'p_{t+1}}{p_t},\cdots,m_s'\}=\{m_1'',m_2'',\cdots,\frac{m_{k'}''p_{t+1}}{p_t},\cdots,m_r''\}$$

证明 记$T(n)$为将n分解为大于1的正整数之积的所有分解式的集合，并且我们把这些分解式中的每一个也写成集合的形式，则$\varphi\in T(n)$将是一个乘积等于n的大于 1 的整数的多重集$\varphi=\{m_1,m_2,\cdots,m_s\}$，其中$n=m_1m_2\cdots m_s$.我们作$T(n)$到$T(n_1)$的映射$g$如下：对任意

$$\varphi\in T(n_1),\varphi=\{m_1,m_2,\cdots,m_s\},n=\prod_{i=1}^{s}m_i,$$

令 $g(\varphi)=\left\{m_1,m_2,\cdots,\frac{m_k p_{t+1}}{p_t},\cdots,m_s\right\}$，其中，$m_k=\max\limits_{p_t|m_i}\{m_i\}$，显然$g(\varphi)\in T(n_1)$由$\varphi$唯一确定，又对任意$\varphi_1\in T(n),\varphi_2\in T(n)$,

$$\varphi_1=\{m_1',m_2',\cdots,m_s'\},\ \varphi_2=\{m_1',m_2',\cdots,m_r'\},$$

若$g(\varphi_1)=g(\varphi_2)$,即

$$\{m_1',m_2',\cdots,\frac{m_k' p_{t+1}}{p_t},\cdots,m_s'\}=\{m_1'',m_2'',\cdots,\frac{m_{k'}'' p_{t+1}}{p_t},\cdots,m_r''\}$$

则显然有 $s=r$.

因为 $p_{t+1}\nmid m_i', p_{t+1}\nmid m_i''(i=1,2,\cdots,s)$, 所以有 $\frac{m_k' p_{t+1}}{p_t}=\frac{m_{k'}'' p_{t+1}}{p_t}$, 即 $m_k'=m_{k'}''$.

从而由 $g(\varphi_1)=g(\varphi_2)$ 可推得结论：适当排列集合中元素的顺序有 $m_i'=m_i''(i=1, 2, \cdots, s)$.

即 $\varphi_1=\varphi_2$. 所以 g 是 $T(n)$ 到 $T(n_1)$ 的一个单射,从而

$$f(n)=|T(n)|\le|T(n_1)|=f(n_1).$$

引理得证.

下面来证明原题.

先证去掉 $m_1\ge m_2\ge\cdots\ge m_k$ 这一条件时，结论成立. 对 n 的不同素因子的个数 k 进行归纳.

(1) 当 $k=1$ 时, $n=p_1^{m_1}, m_1\ge1$, 下证

$$f(n)\le\alpha^{m_1}. \qquad ②$$

若用 $P(m_1)$ 表示正整数 m_1 的加法分拆数(即将 m_1 分拆成若干个加数之和的所有分拆种数),则有 $f(n)=P(m_1)$. 对 $P(m_1)$,我们建立递推不等式

$$P(m_1)\le P(m_1-1)+P(m_1-2),(m_1\ge3). \qquad ③$$

事实上，当 $m_1=3,4$ 时，③显然成立. 当 $m_1\ge5$ 时，设 $m_1=a_1+a_2+\cdots+a_l$, 其中，$1\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_l(l\ge2)$, 分两种情况.

(a) 当 $a_1=1$ 时，因 $m_1=a_1+a_2+\cdots+a_l$, 则 $m_1-1=a_2+a_3+\cdots+a_l$, 可见这样的 m_1 的一个加法分拆对应的 m_1-1 的一个加法分拆，反之亦然，故有 $P(m_1-1)$ 个.

(b) 当 $a_1 \ge 2$ 时，因 $m_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_l$， 则 $m_1 - 2 = (a_1 - 2) + a_2 + \cdots + a_l$，由于此时 $2 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_l$，可见这样的 m_1 的加法分拆数少于 $m_1 - 2$ 的加法分拆数 $P(m_1 - 2)$.

由(a)(b), 再注意到 m_1 本身也是一种加法分拆情况, 故③成立.

为证②, 我们用数学归纳法.

易验证, 当 $m_1 = 1, 2$ 时②成立.

假设对小于 $m_1 (m_1 \ge 3)$ 的正整数, ②成立, 则由③及 $\alpha \ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 知

$$P(m_1) \le P(m_1 - 1) + P(m_1 - 2) \le \alpha^{m_1 - 1} + \alpha^{m_1 - 2} \le \alpha^{m_1},$$

从而对一切正整数 m_1，式②成立.

(2)假设对小于$t(t\ge 2)$的一切正整数k，结论成立，即有

$$f(n)=f(p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k})\le \alpha^{m_1}\beta^{m_2}(\beta+1)^{m_3}\cdots(\beta+k-2)^{m_k}.$$

则当$k=t$时，要证

$$f(p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_t^{m_t})\le \alpha^{m_1}\beta^{m_2}(\beta+1)^{m_3}\cdots(\beta+t-2)^{m_t}. \qquad ④$$

为此，我们再对p_t的指数m_t进行归纳.

当$m_t=1$时，$n=\prod_{k=1}^{t-1}p_i^{m_i}\cdot p_t$，记$T(n)$为将$n$分解为大于1的正整数之积的所有分解式的集合，并且我们把这些分解式中的每一个也写成集合的形式.即$T(n)$的元素是乘积等于n的大于 1 的整数的多重集$\{l_1,l_2,\cdots,l_s\}$，其中$n=l_1l_2\cdots l_s$. 把$T(n)$的元素按含因子p_t的项的形式分类，用$F_{j_1j_2\cdots j_{t-1}}$表示分解式中含有项$p_1^{m_1-j_1}p_2^{m_2-j_2}\cdots p_{t-1}^{m_{t-1}-j_{t-1}}p_t$的那个类，则

$$\left|F_{j_1j_2\cdots j_{t-1}}\right|=f(p_1^{j_1}p_2^{j_2}\cdots p_{t-1}^{j_{t-1}}).$$

其中，$0 \le j_i \le m_i (i=1, 2, \cdots, t-1)$. 由归纳假设，

$$f(p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_{t-1}^{j_{t-1}}) \le \alpha^{j_1} \beta^{j_2} \cdots (\beta + t - 3)^{j_{t-1}}$$

对一切 $0 \le j_i \le m_i (i = 1, 2, \cdots, t-1)$ 成立，所以

$$f(n) = \sum_{j_1=0}^{m_1} \sum_{j_2=0}^{m_2} \sum_{j_3=0}^{m_3} \cdots \sum_{j_{t-1}=0}^{m_{t-1}} \left| F_{j_1 j_2 \cdots j_{t-1}} \right| = \sum_{j_1=0}^{m_1} \sum_{j_2=0}^{m_2} \sum_{j_3=0}^{m_3} \cdots \sum_{j_{t-1}=0}^{m_{t-1}} f(p_1^{j_1} p_2^{j_2} p_3^{j_3} \cdots p_{t-1}^{j_{t-1}})$$

$$\le \sum_{j_1=0}^{m_1} \sum_{j_2=0}^{m_2} \sum_{j_3=0}^{m_3} \cdots \sum_{j_{t-1}=0}^{m_{t-1}} \alpha^{j_1} \beta^{j_2} (\beta+1)^{j_3} \cdots (\beta + t - 3)^{j_{t-1}}$$

$$= (\sum_{j_1=0}^{m_1} \alpha^{j_1})(\sum_{j_2=0}^{m_2} \beta^{j_2})(\sum_{j_3=0}^{m_3} (\beta+1)^{j_3}) \cdots (\sum_{j_{t-1}}^{m_{t-1}} (\beta + t - 3)^{j_{t-1}})$$

$$= \frac{\alpha^{m_1+1} - 1}{\alpha - 1} \cdot \frac{\beta^{m_2+1} - 1}{\beta - 1} \cdot \frac{(\beta+1)^{m_3+1} - 1}{\beta} \cdots \frac{(\beta+t-3)^{m_{t-1}+1} - 1}{\beta + t - 4}$$

$$\le \frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{\beta - 1} \cdot \alpha^{m_1} \cdot \beta^{m_2+1} \cdot \frac{(\beta+1)^{m_3+1}}{\beta} \cdot \cdots \cdot \frac{(\beta+t-3)^{m_{t-1}+1}}{\beta + t - 4}$$

$$= \alpha^{m_1} \beta^{m_2} (\beta+1)^{m_3} \cdots (\beta + t - 4)^{m_{t-2}} (\beta + t - 3)^{m_{t-1}+1}$$

$$\le \alpha^{m_1} \beta^{m_2} \cdots (\beta + t - 3)^{m_{t-1}} (\beta + t - 2).$$

对 $t=2$，此证明仍正确，即当 $m_t=1$ 时，④式恒成立．假设 p_t 的指数小于 $m_t(m_t\geq 2)$ 时，④式成立，考虑 $n=\prod_{i=1}^{t}p_i^{m_i}$，令 $n_1=\frac{np_{t+1}}{p_t}$，其中 $p_{t+1}>p_t$，且为素数，由引理，$f(n)\leq f(n_1)$．于是要证④成立，只需证

$$f(n_1)\leq \alpha^{m_1}\beta^{m_2}\cdots(\beta+t-3)^{m_{t-1}}(\beta+t-2)^{m_t}.$$

为此，把 $T(n_1)$ 的元素按含有因子 p_{t+1} 的项的形式分类．

记 $F_{j_1j_2\cdots j_t}$ 为分解式中含有项 $p_1^{m_1-j_1}p_2^{m_2-j_2}\cdots p_t^{m_t-1-j_t}p_{t+1}$ 的那个类，则

$$\left|F_{j_1j_2\cdots j_t}\right|=f(p_1^{j_1}p_2^{j_2}\cdots p_t^{j_t}),\ 0\leq j_i\leq m_i(i=1,2,\cdots,t-1),\ 0\leq j_t\leq m_t-1.$$

因此，由归纳假设，对一切这样的 j_i，

$$f(p_1^{j_1}p_2^{j_2}\cdots p_t^{j_t})\leq \alpha^{j_1}\beta^{j_2}\cdots(\beta+t-2)^{j_t}$$

成立，所以

$$f(n_1)=\sum_{j_1=0}^{m_1}\sum_{j_2=0}^{m_2}\sum_{j_3=0}^{m_3}\cdots\sum_{j_{t-1}=0}^{m_{t-1}}\sum_{j_t=0}^{m_t-1}\left|F_{j_1j_2\cdots j_t}\right|=\sum_{j_1=0}^{m_1}\sum_{j_2=0}^{m_2}\sum_{j_3=0}^{m_3}\cdots\sum_{j_t=0}^{m_t-1}f(p_1^{j_1}p_2^{j_2}p_3^{j_3}\cdots p_t^{j_t})$$

$$\le\sum_{j_1=0}^{m_1}\sum_{j_2=0}^{m_2}\sum_{j_3=0}^{m_3}\cdots\sum_{j_{t-1}=0}^{m_{t-1}}\sum_{j_t=0}^{m_t-1}\alpha^{j_1}\beta^{j_2}(\beta+1)^{j_3}\cdots(\beta+t-2)^{j_t}$$

$$=(\sum_{j_1=0}^{m_1}\alpha^{j_1})(\sum_{j_2=0}^{m_2}\beta^{j_2})(\sum_{j_3=0}^{m_3}(\beta+1)^{j_3})\cdots(\sum_{j_{t-1}=0}^{m_{t-1}}(\beta+t-3)^{j_{t-1}})(\sum_{j_t=0}^{m_t-1}(\beta+t-2)^{j_t})$$

$$=\frac{\alpha^{m_1+1}-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\beta^{m_2+1}-1}{\beta-1}\cdot\frac{(\beta+1)^{m_3+1}-1}{\beta}\cdots\frac{(\beta+t-3)^{m_{t-1}+1}-1}{\beta+t-4}\cdot\frac{(\beta+t-2)^{m_t}-1}{\beta+t-3}$$

$$\le\frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{\beta-1}\cdot\alpha^{m_1}\cdot\beta^{m_2+1}\cdot\frac{(\beta+1)^{m_3+1}}{\beta}\cdot\cdots\cdot\frac{(\beta+t-3)^{m_{t-1}+1}}{\beta+t-4}\cdot\frac{(\beta+t-2)^{m_t}}{\beta+t-3}$$

$$=\alpha^{m_1}\beta^{m_2}(\beta+1)^{m_3}\cdots(\beta+t-3)^{m_{t-1}}(\beta+t-2)^{m_t}.$$

即对 m_t，式④仍成立.

由数学归纳法原理知，①成立．特别地，当 $m_1\ge m_2\ge\cdots\ge m_k$ 时，①式成立.

关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。