2022-2023 下学年高三年级 TOP 二十名校四月冲刺考(一)

高三理科数学试卷

注意事项:

1. 本试卷共 4 页,考试时间 120 分钟,卷面总分 150 分。
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡相应的位置上。
3. 全部答案写在答题卡上,答在本试卷上无效。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\left\{x\left|\frac{x}{2-x}>0\right.\right\}$,$B=\{-1,0,1,2\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{-1\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{1,2\}$

2. 已知复数 z 满足 $|z+i|=|z-i|$,z 在复平面内对应的点为 (x,y),则

A. $x=0$　　B. $y=0$　　C. $x+y=0$　　D. $x-y=0$

3. 下列直线中,可以作为曲线 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的对称轴的是

A. $x=\frac{\pi}{4}$　　B. $x=\frac{\pi}{3}$　　C. $x=\frac{\pi}{2}$　　D. $x=\frac{2\pi}{3}$

4. 尿酸是鸟类和爬行类的主要代谢产物。正常情况下,人体内的尿酸处于平衡的状态,但如果体内产生过多来不及排泄或者尿酸排泄机制退化,则体内尿酸滞留过多,当血液尿酸浓度大于 7 mg/dL,人体体液变酸,时间长会引发痛风,而随低食物(低嘌呤食物)对提高痛风病人缓解率,降低血液尿酸浓度具有较好的疗效.科研人员在对某类随低食物的研究过程中发现,在每天定时、定量等特定条件下,可以用对数模型 $U(t)=-U_0\ln Kt$ 描述血液尿酸浓度 $U(t)$(单位:mg/dL)随摄入随低食物天数 t 的变化规律,其中 U_0 为初始血液尿酸浓度,K 为参数. 已知 $U_0=20$,在按要求摄入随低食物 50 天后,测得血液尿酸浓度为 15,若使血液尿酸浓度达到正常值,则需将摄入随低食物的天数至少提高到($e^{\frac{2}{5}}\approx1.49$)

A. 69　　B. 71　　C. 73　　D. 75

5. 计划安排甲、乙两个课外兴趣小组到 5 处水质监测点进行水样采集,每个兴趣小组采集 3 处水样,每处水样至少有 1 个兴趣小组进行采集,则不同的安排方法共有

A. 30 种　　B. 32 种　　C. 34 种　　D. 36 种

6. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F,准线为 l,点 $A(3,2\sqrt{3})$ 在 C 上,直线 AF 与 l 交于点 B,则 $\frac{|AF|}{|BF|}=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M,N,P 分别为 A_1B,A_1C_1,A_1D 的中点,则下列结论中错误的是

A. $MN/\!/AD_1$　　B. 平面 $MNP/\!/$平面 BC_1D

C. $MN\perp CD$　　D. 平面 $MNP\perp$平面 A_1BD

8. 已知圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=5$，圆 C' 是以圆 $x^2+y^2=1$ 上任意一点为圆心，半径为 1 的圆. 圆 C 与圆 C' 交于 A,B 两点，则当 $\angle ACB$ 最大时，$|CC'|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

9. 32 名业余棋手组队与甲、乙 2 名专业棋手进行车轮挑战赛，每名业余棋手随机选择一名专业棋手进行一盘比赛，每盘比赛结果相互独立，若获胜的业余棋手人数不少于 10 名，则业余棋手队获胜. 已知每名业余棋手与甲比赛获胜的概率均为 $\frac{1}{3}$，每名业余棋手与乙比赛获胜的概率均为 $\frac{1}{4}$，若业余棋手队获胜，则选择与甲进行比赛的业余棋手人数至少为

A. 24　　B. 25　　C. 26　　D. 27

10. 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：如果 $a_m=a_n$，那么 $a_{m+1}=a_{n+1}$，且 $a_1=a_5=1$，$a_3=-3$，$a_4=4$，a_2 是 a_1 与 a_4 的等比中项. 若 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 存在最大值 S，则 $S=$

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

11. 已知圆台 O_1O 的上、下底面半径分别为 r,R，高为 h，平面 α 经过圆台 O_1O 的两条母线，设 α 截此圆台所得的截面面积为 S，则

A. 当 $h\geqslant R-r$ 时，S 的最大值为 $(R+2r)h$

B. 当 $h\geqslant R-r$ 时，S 的最大值为 $\frac{(R+r)[h^2+(R-r)^2]}{2(R-r)}$

C. 当 $h<R-r$ 时，S 的最大值为 $(R+2r)h$

D. 当 $h<R-r$ 时，S 的最大值为 $\frac{(R+r)[h^2+(R-r)^2]}{2(R-r)}$

12. 已知 $a=\ln 2.4$，$b=\log_3 2.8$，$c=\lg 5.7$，则

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-1)$，写出一个与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直的非零向量 $\boldsymbol{c}=$______.

14. 已知曲线 $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), & x>0,\\ -\ln(x+1), & -1<x<0,\end{cases}$ 过曲线上两点 A,B 分别作曲线的切线交于点 P，$AP\perp BP$. 记 A,B 两点的横坐标分别为 x_1,x_2，则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=$______.

15. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左顶点为 A，P 为 C 的一条渐近线上一点，AP 与 C 的另一条渐近线交于点 Q，若直线 AP 的斜率为 1，且 A 为 PQ 的三等分点，则 C 的离心率为______.

16. 某种平面铰链四杆机构的示意图如图 1 所示，AC 与 BD 的交点在四边形 $ABCD$ 的内部. 固定杆 BC 的长度为 $\sqrt{2}$，旋转杆 AB 的长度为 1，AB 可绕着连接点 B 转动，在转动过程中，伸缩杆 AD 和 CD 同时进行伸缩，使得 AD 和 CD 的夹角为 $45°$，AD 的长度是 CD 的长度的 $\sqrt{2}$ 倍. 如图 2，若在连接点 B,D 之间加装一根伸缩杆 BD，则伸缩杆 BD 的长度的最大值为______.

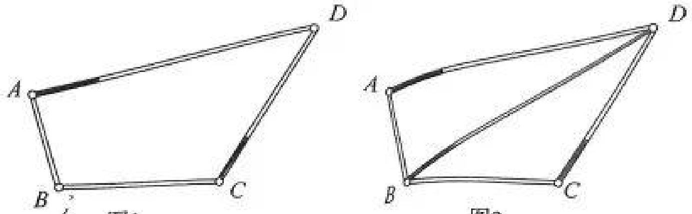


图1　　图2

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17 ~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$，等差数列$\{b_n\}$满足 $b_n=a_n+a_{n+1}$，$b_1=-3$，$b_2+b_3=-12$.

（1）证明：$a_n-a_{n+2}=2$；

（2）若$\{a_n\}$为等差数列，求$\{a_n\}$的前 n 项和.

18.（本小题满分 12 分）

太平洋是地球上岛屿最多的大洋，有大小岛屿 2 万多个，岛屿面积约占世界岛屿总面积的 45%，蕴藏着丰富的动植物资源. 为了解太平洋某海域的岛屿上植物种数的生态学规律，随机选择了 6 个岛屿，搜集并记录了每个岛屿的植物种数（单位：个）和岛屿面积（单位：平方千米），整理得到如下数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6
岛屿面积 x	6	15	25	34	44	54
植物种数 y	5	10	15	19	24	31

并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2=2\ 042$，$\sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i=1\ 201$.

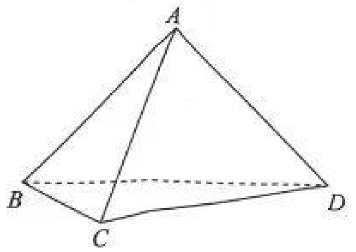
（1）由数据看出，可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系. 根据表中前 4 号样本数据，求 y 关于 x 的线性回归方程；

（2）根据所求的线性回归方程计算第 5，6 号样本植物种数的预报值 $\hat{y}$，并与相应植物种数的真实值 y 进行比较. 若满足 $|\hat{y}-y|\leqslant 1$，则可用此回归方程估计该海域其他岛屿的植物种数，并估计面积为 100 平方千米的岛屿上的植物种数；若不满足，请说明理由.

参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，$\angle BCD=90°$，$AB=AC=AD$.



（1）证明：平面 $ABD\perp$ 平面 BCD；

（2）若 $BD=2$，$BC=1$，当直线 AB 与平面 ACD 所成的角最大时，求三棱锥 $A-BCD$ 的体积.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，P 为 C 上一点，O 为原点，$|PA|=|PO|$，$\angle APO=90°$，$\triangle APO$ 的面积为 1.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)设 B 为 C 的右顶点，过点 $(1,0)$ 且斜率不为 0 的直线 l 与 C 交于 M，N 两点，证明：$3\tan\angle MAB=\tan\angle NBA$.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

(1)讨论 $f'(x)$ 的单调性;

(2)若直线 $y=\frac{e^2}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 有两个交点，求 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分。请考生从 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22.【选修 4-4：坐标系与参数方程】(10 分)

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=t\cos\theta,\\y=-1+t\sin\theta\end{cases}$ (t 为参数)，曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases}x=t',\\y=t'^2-2\end{cases}$ (t' 为参数)，以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=1$.

(1)求 C_1，C_2 的直角坐标方程;

(2)若直线 l 与 C_1 交于 A，B 两点，与 C_2 交于 C，D 两点，若 $|OA|=|OB|$，且 $|OC|=|OD|$，求 $|CD|$.

23.【选修 4-5：不等式选讲】(10 分)

已知 a，b 均不为零，且满足 $a^2+b^2=1$. 证明：

(1) $|a|+|b|\leqslant\sqrt{2}$;

(2) $\left|\frac{a^3}{b}\right|+\left|\frac{b^3}{a}\right|\geqslant 1$.

2022-2023 下学年高三年级 TOP 二十名校四月冲刺考(一)

高三理科数学参考答案

1.【答案】 B

【解析】 $A=\{x|x(x-2)<0\}=\{x|0<x<2\}$，则 $A\cap B=\{1\}$. 故选 B.

2.【答案】 B

【解析】 设复数 z，$-\mathrm{i}$，i 在复平面内对应的点分别为 $Z(x,y)$，$A(0,-1)$，$B(0,1)$，则 $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|$ 的几何意义是 Z 到 A 的距离和 Z 到 B 的距离相等，则 z 在复平面内对应的点 (x,y) 满足 $y=0$. 故选 B.

3.【答案】 A

【解析】 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2x$. 令 $\sin 2x=\pm1$，则 $2x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，故对称轴可以是直线 $x=\frac{\pi}{4}$. 故选 A.

4.【答案】 D

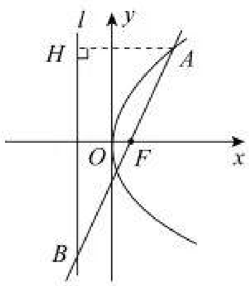
【解析】 由函数模型 $f(t)=-C_0\ln Kt$，当 $t=50$ 时，$f(t)=15$，可得 $15=-20\ln(50K)$，即 $15=-20\ln 50-20\ln K$①. 设血液尿酸浓度达到正常值 7 时，摄入天数为 t'，则 $7=-20\ln(t'K)$，即 $7=-20\ln t'-20\ln K$②. ②－①可得 $-8=-20\ln\frac{t'}{50}$，即 $\ln\frac{t'}{50}=\frac{2}{5}$，则 $\frac{t'}{50}=e^{\frac{2}{5}}$，$t'=50e^{\frac{2}{5}}\approx74.5$. 故选 D.

5.【答案】 A

【解析】 依题意，每个兴趣小组采集 3 处水样，每处水样至少有 1 个兴趣小组进行采集，可分为两步. 第一步，甲组进行采样，有 $C_5^3=10$ 种方法；第二步，乙组进行采样，有 $C_2^2\times C_3^1=3$ 种方法，所以共有 $10\times3=30$ 种方法. 故选 A.

6.【答案】 A

【解析】 由 $A(3,2\sqrt{3})$ 在 $y^2=2px$ 上，得 $12=2p\times3$，解得 $p=2$，则 $F(1,0)$，直线 AF 的斜率 $k=\frac{2\sqrt{3}}{3-1}=\sqrt{3}$，倾斜角为 $60°$. 如图，过点 A 作 l 的垂线，垂足为 H. 由抛物线的定义可知 $|AF|=|AH|$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AHB$ 中，$\angle BAH=60°$，$\therefore |AB|=2|AH|$，$\therefore |BF|=|AB|-|AF|=|AH|$，$\therefore |AF|=|BF|$. 故选 A.



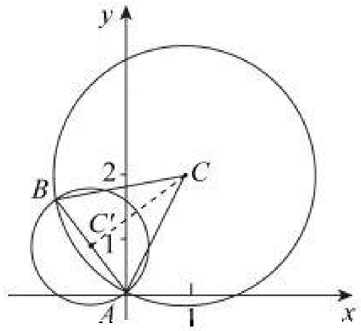
7.【答案】 D

【解析】 在 $\triangle A_1BC_1$ 中，因为 M，N 分别为 A_1B，A_1C_1 的中点，所以 $MN//BC_1$，又 $BC_1//AD_1$，所以 $MN//AD_1$，故 A 选项正确；同理，$MP//BD$，$MN//BC_1$，则 $MP//$ 平面 BC_1D，$MN//$ 平面 BC_1D，所以

平面 MNP // 平面 BC_1D，故 B 选项正确；因为 $MN // AD_1$，$AD_1 \perp CD$，所以 $MN \perp CD$，故 C 选项正确；取 BD 的中点 E，则 $\angle A_1EC_1$ 即为二面角 A_1-BD-C_1 的平面角，易知 $\angle A_1EC_1 \neq 90°$，则平面 A_1BD 与平面 BC_1D 不垂直，又平面 MNP // 平面 BC_1D，故平面 MNP 与平面 A_1BD 不垂直，故 D 选项错误. 故选 D.

8.【答案】 D

【解析】 在 $\triangle ABC$ 中，$|AC|=|BC|=\sqrt{5}$. 如图，当公共弦 AB 最大，即 AB 为圆 C' 的直径时，$\angle ACB$ 最大. 此时在 Rt$\triangle CC'A$ 中，$|AC|=\sqrt{5}$，$|AC'|=1$，$|CC'|=\sqrt{|AC|^2-|AC'|^2}=2$. 故选 D.



9.【答案】 A

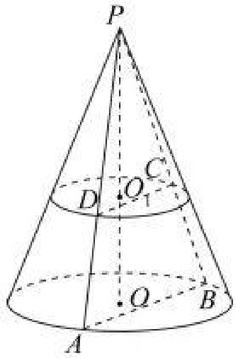
【解析】 设选择与甲进行比赛且获胜的业余棋手人数为 X、选择与乙进行比赛且获胜的业余棋手人数为 Y；设选择与甲进行比赛的业余棋手人数为 n，则选择与乙进行比赛的业余棋手人数为 $32-n$. X 所有可能的取值为 $0,1,2,\cdots,n$，则 $X\sim B\left(n,\frac{1}{3}\right)$，$E(X)=\frac{n}{3}$；$Y$ 所有可能的取值为 $0,1,2,\cdots,32-n$，则 $Y\sim B\left(32-n,\frac{1}{4}\right)$，$E(Y)=\frac{32-n}{4}$. 获胜的业余棋手总人数的期望 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{n}{3}+\frac{32-n}{4}=\frac{n+96}{12}\geqslant 10$，解得 $n\geqslant 24$. 故选 A.

10.【答案】 B

【解析】 由 $a_1=1$，$a_4=4$，a_2 是 a_1 与 a_4 的等比中项，可知 $a_2=\pm 2$. 若 $a_2=2$，由 $a_1=a_5=1$，可知 $a_6=2$，由 $a_3=-3$，可知 $a_7=-3$，则 $a_8=a_4=4$，则数列 $\{a_n\}$：$1,2,-3,4,1,2,-3,4,\cdots$，是以 4 为周期的数列，易知前 n 项和无最大值. 若 $a_2=-2$，同理可得数列 $\{a_n\}$：$1,-2,-3,4,1,-2,-3,4,\cdots$，则数列 $\{S_n\}$ 是以 4 为周期的数列，且 $S_1=1$，$S_2=-1$，$S_3=-4$，$S_4=0$，所以 S_n 的最大值 $S=1$. 故选 B.

11.【答案】 D

【解析】 如图，将圆台 O_1O 补成圆锥 PO. 设圆台 O_1O 的母线长为 l，则 $l^2=h^2+(R-r)^2$，等腰梯形 $ABCD$ 为过两母线的截面. 设 $PC=x$，$\angle APB=\theta$，由 $\frac{r}{R}=\frac{x}{x+l}$，则有 $x=\frac{rl}{R-r}$，则 $S=S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}[(x+l)^2-x^2]\sin\theta=\frac{R+r}{2(R-r)}l^2\sin\theta$. 当 $h\geqslant R-r$ 时，$\theta\leqslant 90°$，当 $\sin\theta$ 最大时，即截面为轴截面时，面积最大，则 S 的最大值为 $(R+r)h$. 当 $h<R-r$ 时，$\theta>90°$，当 $\sin\theta=1$ 时，截面面积最大，则 S 的最大值为 $\frac{R+r}{2(R-r)}l^2=\frac{(R+r)[h^2+(R-r)^2]}{2(R-r)}$. 故选 D.



12.【答案】 C

【解析】 $a=\ln 2.4>0$, $b=\log_3 2.8>0$, $\frac{a}{b}=\frac{\ln 2.4}{\log_3 2.8}<\frac{\ln 2.4}{\log_3 e}=\ln 2.4\times\ln 3<\left(\frac{\ln 2.4+\ln 3}{2}\right)^2=\left(\frac{\ln 7.2}{2}\right)^2=(\ln\sqrt{7.2})^2<(\ln e)^2=1$,则 $a<b$. $c=\lg 5.7<\lg 2.4^2=\frac{\ln 2.4^2}{\ln 10}=\frac{2\ln 2.4}{\ln 10}=\frac{\ln 2.4}{\ln\sqrt{10}}$因为 $\ln\sqrt{10}>\ln e>1$,所以 $c<\ln 2.4=a$,则有 $c<a<b$. 故选 C.

13.【答案】 $(1,-1)$(答案不唯一,横、纵坐标互为相反数即可)

【解析】 由题意可知 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,3)$,设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$,则 $3x+3y=0$,取 $x=1$,则 $y=-1$,则与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直的非零向量可以为 $\boldsymbol{c}=(1,-1)$.

14.【答案】 -1

【解析】 当 $x>0$ 时,$f'(x)=\frac{1}{x+1}$. 当 $x<0$ 时,$f'(x)=-\frac{1}{x+1}$,根据导数的几何意义结合图象,不妨设 $x_1<0$,$x_2>0$. 因为曲线 $f(x)$ 在点 A、B 处的两条切线互相垂直,所以 $-\frac{1}{x_1+1}\cdot\frac{1}{x_2+1}=-1$,整理得 $x_1x_2+x_1+x_2=0$,所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-1$.

15.【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{3}$

【解析】 不妨设点 P 在第二象限,直线 AP 的方程为 $y=x+a$,联立 $\begin{cases}y=x+a,\\ y=-\frac{b}{a}x,\end{cases}$ 得点 P 的纵坐标 $y_P=\frac{ab}{a+b}$;联立 $\begin{cases}y=x+a,\\ y=\frac{b}{a}x,\end{cases}$ 得点 Q 的纵坐标 $y_Q=\frac{ab}{b-a}$. 由 A 为 PQ 的三等分点,可知 $y_Q=-2y_P$,则有 $\frac{ab}{b-a}=-\frac{2ab}{a+b}$,整理,得 $a=3b$,则 $a^2=9(c^2-a^2)$,故 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

16.【答案】 3

【解析】 设 $\angle ABC=\theta$,$\theta\in(0°,180°)$. 在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\theta=3-2\sqrt{2}\cos\theta$,由正弦定理得 $\frac{1}{\sin\angle ACB}=\frac{AC}{\sin\theta}$,则 $\sin\angle ACB=\frac{\sin\theta}{AC}$. 在 $\triangle ACD$ 中,$AD=\sqrt{2}CD$,$\angle ADC=45°$,则 $\angle ACD=\frac{\pi}{2}$,$CD=AC$. 在 $\triangle DCB$ 中,由余弦定理得 $BD^2=CD^2+2-2\sqrt{2}CD\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\angle ACB\right)=$

$AC^2+2+2\sqrt{2}AC\sin\angle ACB=3-2\sqrt{2}\cos\theta+2+2\sqrt{2}AC\cdot\dfrac{\sin\theta}{AC}=5+2\sqrt{2}(\sin\theta-\cos\theta)=5+4\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$，

当 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$ 时，$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 取最大值 1，则 BD^2 的最大值为 9，故 BD 的最大值为 3.

17.【答案】 见解析

【解析】 (1)设数列$\{b_n\}$的公差为 d，由 $b_2+b_3=-12$，得 $2b_1+3d=-12$，

由 $b_1=-3$，得 $d=-2$，故 $b_n=-2n-1$，

即 $a_n+a_{n+1}=-2n-1$. ① ……………………………………………………………… (3 分)

递推，得 $a_{n+1}+a_{n+2}=-2n-3$，②

①−②，得 $a_n-a_{n+2}=2$，

故 $a_n-a_{n+2}=2$ 得证. ……………………………………………………………… (6 分)

(2)法一：若$\{a_n\}$为等差数列，设公差为 d'，

由 $a_{n+2}-a_n=-2$ 可得，$2d'=-2$，$d'=-1$.

又 $a_n+a_{n+1}=-2n-1$，即 $2a_n+d'=-2n-1$，所以 $a_n=-n$.

又 $a_1=-1$，$\therefore$ $\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\dfrac{(-1-n)n}{2}=-\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{n}{2}$.

法二：由 $a_n+a_{n+1}=-2n-1$，可知 $a_2=-a_1-3$.

又 $a_{n+2}-a_n=-2$，所以 $a_3=a_1-2$.

又$\{a_n\}$为等差数列，所以 $a_1+a_3=2a_2$，

即 $a_1+(a_1-2)=2(-a_1-3)$，解得 $a_1=-1$， ……………………………………… (9 分)

则有 $d'=-1$，$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=-n+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot(-1)=-\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{n}{2}$. ………………… (12 分)

18.【答案】 见解析

【解析】 (1)$\bar{x}=\dfrac{6+15+25+34}{4}=20$，$\bar{y}=\dfrac{5+10+15+19}{4}=12.25$， ………………………… (2 分)

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i-4\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2-4\bar{x}^2}=\dfrac{1\ 201-4\times20\times12.25}{2\ 042-4\times400}=0.5$，…………………………………… (4 分)

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=12.25-0.5\times20=2.25$.

所以所求线性回归方程为 $\hat{y}=0.5x+2.25$. ……………………………………………… (6 分)

(2)当 $x=44$ 时，$\hat{y}=0.5\times44+2.25=24.25$，

$|\hat{y}-y|=|24.25-24|=0.25\leqslant1$. ……………………………………………………… (8 分)

当 $x=54$ 时，$\hat{y}=0.5\times54+2.25=29.25$，

$|\hat{y}-y|=|29.25-31|=1.75>1$. ……………………………………………………… (10 分)

故不能用此回归方程估计该海域其他岛屿的植物种数. ………………………………… (12 分)

19.【答案】 见解析

【解析】 (1)如图，取 BD 的中点 G，连接 AG，CG.

因为$\angle BCD=90°$，$BG=DG$，所以 $BG=CG$.

又因为 $AB=AC$，AG 为公共边，

所以$\triangle ABG \cong \triangle ACG$,

所以$\angle AGB=\angle AGC$. …………………………………………………………………… (2 分)

同理可得$\angle AGC=\angle AGD$,

所以$\angle AGB=\angle AGD$.

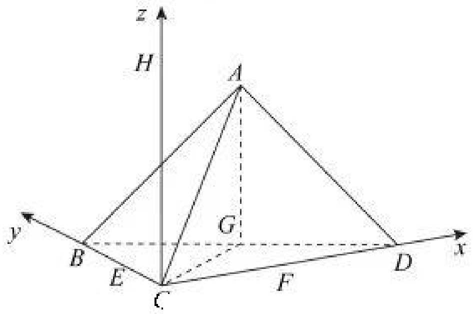
因为$\angle AGB+\angle AGD=180°$,

所以$\angle AGB=\angle AGC=\angle AGD=90°$, ………………………………………………………… (4 分)

所以 $AG\perp BD$,$AG\perp CG$.

又因为 $BD\cap CG=G$,所以 $AG\perp$平面 BCD.

又因为 $AG\subset$平面 ABD,所以平面 $ABD\perp$平面 BCD. ………………………………………… (5 分)



(2)过点 C 作直线 $CH\perp$平面 BCD,以 C 为坐标原点,$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{CH}$ 的方向分别为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系,

设 $AG=a(a>0)$,则 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},a\right)$,$B(0,1,0)$,$C(0,0,0)$,$D(\sqrt{3},0,0)$,

则有 $\overrightarrow{BA}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},a\right)$,$\overrightarrow{CA}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},a\right)$,$\overrightarrow{CD}=(\sqrt{3},0,0)$.

设平面 ACD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+az=0,\\ \sqrt{3}x=0,\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}=(0,2a,-1)$.

设直线 AB 与平面 ACD 所成的角为 α,

则 $\sin\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BA}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BA}|}=\frac{2a}{\sqrt{4a^2+1}\cdot\sqrt{a^2+1}}$. ……………………………………… (8 分)

$\sin^2\alpha=\frac{4a^2}{(4a^2+1)(a^2+1)}=\frac{4a^2}{4a^4+5a^2+1}=\frac{4}{4a^2+\frac{1}{a^2}+5}\leqslant\frac{4}{2\sqrt{4a^2\cdot\frac{1}{a^2}}+5}=\frac{4}{9}$,

当且仅当$4a^2=\frac{1}{a^2}$,即 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$时,等号成立. …………………………………………………… (11 分)

因为 $BD=2$,$BC=1$,$\angle BCD=90°$,

所以 $CD=\sqrt{3}$,

此时三棱锥 $A-BCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\times AG=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{12}$,

故当直线 AB 与平面 ACD 所成的角最大时，三棱锥 $A-BCD$ 的体积为$\frac{\sqrt{6}}{12}$. ……………（12 分）

20.【答案】 见解析

【解析】 (1)不妨设点 P 在 x 轴的上方，

由椭圆的性质可知$|OA|=a$.

因为$\triangle APO$ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形，所以 $P\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$，

代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得$\frac{\frac{a^2}{4}}{a^2}+\frac{\frac{a^2}{4}}{b^2}=1$，整理，得 $a^2=3b^2$. ……………………（2 分）

因为$\triangle APO$ 的面积为 1，所以$\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}=1$，所以 $a^2=4,b^2=\frac{4}{3}$.

故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$. ……………………（4 分）

(2)设直线 AM 的斜率为 k_1，直线 BN 的斜率为 k_2，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 MN 的方程为 $x=my+1$.

不妨设 $y_2<0<y_1$，则 $k_1=\tan\angle MAB$，$k_2=\tan\angle NBA$.

联立$\begin{cases}x=my+1,\\x^2+3y^2=4,\end{cases}$可得$(m^2+3)y^2+2my-3=0$，

$\Delta=16m^2+36>0$，则 $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+3}$，$y_1y_2=-\frac{3}{m^2+3}$. ……………………（6 分）

所以$\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\frac{2m}{3}$，即 $2my_1y_2=3(y_1+y_2)$，

则$\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{x_2-2}{y_2}=\frac{y_1(my_2-1)}{(my_1+3)y_2}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}=\frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}=\frac{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2}=\frac{1}{3}$. ……………………（10 分）

所以 $3k_1=k_2$，

故 $3\tan\angle MAB=\tan\angle NBA$ 得证. ……………………（12 分）

21.【答案】 见解析

【解析】 (1)设 $g(x)=f'(x)=\ln x-2ax+1$，$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$g'(x)=\frac{1}{x}-2a$. ……………………（1 分）

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增. ……………………（2 分）

当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2a}$，

若 $x\in\left(0,\frac{1}{2a}\right)$，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；

若 $x\in\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，$f'(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2a}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减. ……（4 分）

(2) 直线 $y=\frac{e^2}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 有两个交点，即关于 x 的方程 $x\ln x-ax^2=\frac{e^2}{2}$ 有两个解，

整理方程，得 $a=\frac{\ln x}{x}-\frac{e^2}{2x^2}$. ……（6 分）

令 $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}-\frac{e^2}{2x^2}$，其中 $x>0$，

则 $\varphi'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{e^2}{x^3}=\frac{x-x\ln x+e^2}{x^3}$.

令 $s(x)=x-x\ln x+e^2$，

则 $s'(x)=-\ln x$.

当 $0<x<1$ 时，$s'(x)>0$，此时函数 $s(x)$ 单调递增；

当 $x>1$ 时，$s'(x)<0$，此时函数 $s(x)$ 单调递减. ……（8 分）

由 $s(1)=1+e^2$，$s(e^2)=0$，

得 $0<x<1$ 时，$x-x\ln x+e^2=x(1-\ln x)+e^2>0$，则 $\varphi'(x)>0$；

当 $1<x<e^2$ 时，$s(x)>s(e^2)=0$，则 $\varphi'(x)>0$；

当 $x>e^2$ 时，$s(x)<s(e^2)=0$，则 $\varphi'(x)<0$.

所以函数 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,e^2)$ 上单调递增，在区间 $(e^2,+\infty)$ 上单调递减.

则 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(e^2)=\frac{3}{2e^2}$. ……（10 分）

当 x 趋近于 $+\infty$ 时，$\varphi(x)$ 趋近于 0，即当 $x>e^2$ 时，$\varphi(x)>0$；

当 x 趋近于 0 时，$\varphi(x)$ 趋近于 $-\infty$.

故要使直线 $y=\frac{e^2}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 有两个交点，则需 $0<a<\frac{3}{2e^2}$，

即 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{3}{2e^2}\right)$. ……（12 分）

22.【答案】 见解析

【解析】 (1) 由曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases}x=t',\\ y=t'^2-2,\end{cases}$

得 C_1 的直角坐标方程为 $y=x^2-2$. ……（2 分）

由 $\rho=1$ 得 $\rho^2=1$，又 $x^2+y^2=\rho^2$，则有 $x^2+y^2=1$，

故 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=1$. ……（4 分）

(2) 把 $\begin{cases}x=t\cos\theta,\\ y=-1+t\sin\theta\end{cases}$ 代入 $y=x^2-2$，得 $t\sin\theta-1=t^2\cos^2\theta-2$，

整理，得 $t^2\cos^2\theta-t\sin\theta-1=0$

设 t_1,t_2 所对应的点分别为 A,B，

则 $t_1+t_2=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$. ……（6 分）

把$\begin{cases}x=t\cos\theta,\\ y=-1+t\sin\theta\end{cases}$代入 $x^2+y^2=1$，得 $t^2\cos^2\theta+(t\sin\theta-1)^2=1$，

整理，得 $t^2-2t\sin\theta=0$，

设 t_3,t_4 所对应的点分别为 C,D，

则 $t_3+t_4=2\sin\theta$. ……………………………………………………………………（8 分）

因为$|OA|=|OB|$，$|OC|=|OD|$，即 AB 与 CD 的中点重合，

所以 $t_1+t_2=t_3+t_4$，

所以$\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=2\sin\theta$，且 $\sin\theta\neq0$，

所以 $\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故$|CD|=\sqrt{2}$. ……………………………………………………………………（10 分）

23.【答案】 见解析

【解析】 (1)因为 $a^2+b^2=1$，即$|a|^2+|b|^2=1$，

所以$|a|^2+|b|^2=(|a|+|b|)^2-2|a|\cdot|b|=1$. ……………………………………（2 分）

根据基本不等式，得$(|a|+|b|)^2-1=2|a|\cdot|b|\leqslant\dfrac{(|a|+|b|)^2}{2}$，

当且仅当$|a|=|b|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，等号成立，

整理，得$(|a|+|b|)^2\leqslant2$，

所以$|a|+|b|\leqslant\sqrt{2}$. ……………………………………………………………（4 分）

(2) $\left|\dfrac{a^3}{b}\right|+\left|\dfrac{b^3}{a}\right|=\left|\dfrac{a}{b}\right|\cdot a^2+\left|\dfrac{b}{a}\right|\cdot b^2$

$=\left|\dfrac{a}{b}\right|\cdot(1-b^2)+\left|\dfrac{b}{a}\right|\cdot(1-a^2)$

$=\left|\dfrac{a}{b}\right|-|ab|+\left|\dfrac{b}{a}\right|-|ab|$

$=\left|\dfrac{a}{b}\right|+\left|\dfrac{b}{a}\right|-2|ab|$. …………………………………………………（8 分）

由基本不等式和不等式的性质，得$\left|\dfrac{a}{b}\right|+\left|\dfrac{b}{a}\right|\geqslant2\sqrt{\left|\dfrac{a}{b}\right|\cdot\left|\dfrac{b}{a}\right|}=2$，$2|ab|\leqslant a^2+b^2=1$.

故$\left|\dfrac{a}{b}\right|+\left|\dfrac{b}{a}\right|-2|ab|\geqslant2-1=1$，

当且仅当$|a|=|b|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，等号成立，

所以$\left|\dfrac{a^3}{b}\right|+\left|\dfrac{b^3}{a}\right|\geqslant1$. ……………………………………………（10 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。