2023届高中数学高三（理科）三检参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	D	B	A	D	A	B	A	B	C	C

12. 已知定义域为**R**的函数$f(x)$的图象是连续不断的曲线，对任意实数m，n均满足$e^n f(m)+e^{2m}f(n-m)=e^m f(n)$，且当$x>0$时，$f(x)>0$. 若$g(x)=\begin{cases} e^{x-1}f(1-x) & x<1 \\ e^{1-x}f(x-1) & x\ge 1\end{cases}$，

则下列判断正确的是

A. $g(1)>g(0)$　　**B.** $g(3)<g(-1)$　　**C.** $g(2)<g(-1)$　　**D.** $g(3)>g(-2)$

解：由题意知 $\dfrac{f(m)}{e^m}+\dfrac{f(n-m)}{e^{n-m}}=\dfrac{f(n)}{e^n}$，

令$h(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，当$x>0$时，$f(x)>0$ $\therefore h(x)>0$

$\because$ $h(m)+h(n-m)=h(n)$，当$n>m$时，$h(n-m)>0$　$\therefore h(m)<h(n)$

$\therefore h(x)$在**R**上递增　$\therefore g(x)=\begin{cases} h(1-x) & x<1 \\ h(x-1) & x\ge 1\end{cases}$

$\therefore g(x)$关于$x=1$对称，且$g(x)$在$(1,+\infty)$上递增

$g(1)<g(0)$ A错，$g(3)=g(-1)$ B错，$g(2)<g(-1)$ C正确，$g(3)<g(-2)$ D错，

二、填空题

13. $a_n=2n-5$

14.3

15. $\dfrac{\sqrt{31}}{8}$

16.-1

解：两切线分别为$y=\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)+\ln x_1$ **和** $y=e^{x_2}(x-x_2)+e^{x_2}$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{1}{x_1}=e^{x_2} \\ \ln x_1-1=(1-x_2)e^{x_2}\end{cases} \Rightarrow -x_2-1=(1-x_2)\frac{1}{x_1} \Rightarrow x_2=\frac{1+x_1}{1-x_1}$$

$$\therefore \frac{2}{x_1-1}+x_2=-1$$

三．解答题

17.解：（1）$\because \tan B+\tan C=\dfrac{2\sin A}{\cos C}$ $\quad\therefore \dfrac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\cos B\cos C}=\dfrac{2\sin A}{\cos C}$

又$\because \sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin A$ $\quad\therefore \cos B=\dfrac{1}{2}$

$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$

（2）$\because \Delta ABC$是钝角三角形，又$\because B=\dfrac{\pi}{3}$且$a>c$，$\therefore$角$A$为钝角

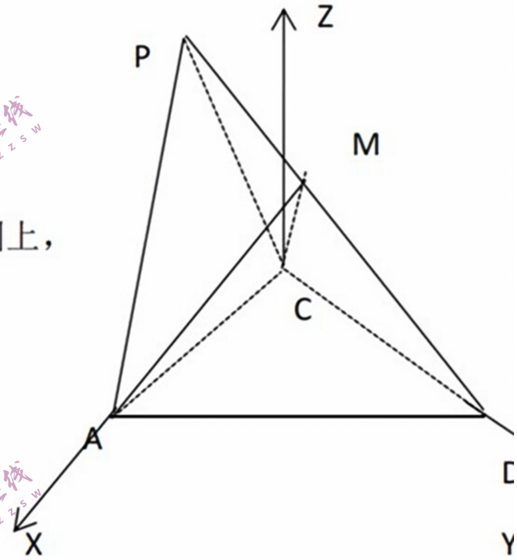
$$\therefore \begin{cases} a^2>b^2+c^2 \\ b^2=a^2+c^2-ac \\ a=c+2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad c>2$$

18.（1）证明：在梯形$ABCD$中取AD得中点N，连接CN，

则由 BC 平行且等于 AN，可知 ABCN 为平行四边形，

所以 CN=AB,由$CN=\dfrac{1}{2}AD$ 可得 C 点在以 AD 为直径的圆上，

所以$AC\perp CD$.



$AD=4,CD=2,AC=2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} AC\perp CD \\ PA\perp CD \end{matrix}\right\}\Rightarrow CD\perp 面PAC$$

$\Rightarrow$面$PAC\perp$面ACD

（2）

坐标系如图示

$P(\sqrt{3},0,1),A(2\sqrt{3},0,0),D(0,2,0)$

$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}\Rightarrow M(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,2\lambda,1-\lambda)$

$\overrightarrow{CA}=(2\sqrt{3},0,0)$ $\overrightarrow{CM}=(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,2\lambda,1-\lambda)$

面ACM的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$

$\begin{cases} x=0 \\ 2\lambda y+(1-\lambda)z=0 \end{cases}$ 面ACM的法向量$\vec{n}=(0,\lambda-1,2\lambda)$

$\overrightarrow{PA}=(\sqrt{3},0,-1)$, $h=\left|\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}=\left|\frac{2\lambda}{\sqrt{(\lambda-1)^2+4\lambda^2}}\right| \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

面ACM的法向量$\vec{n}=(0,-\frac{1}{2},1)$

面ACD法向量$\vec{m}=(0,0,1)$

$$\vec{m}\cdot\vec{n}=|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

19

【答案】(1) 该考生报考甲大学恰好有一门笔试科目优秀概率为$\frac{54}{125}$；该考生报考乙大学恰好有一门笔试科目优秀概率为$\frac{9}{20}$；

(2) $0<n<\frac{11}{20}$.

(1)设该考生报考 A 大学恰好有一门笔试科目优秀为事件A，则$P(A)=C_3^1\cdot\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$;

该考生报考 B 大学恰好有一门笔试科目优秀为事件B，则$P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{9}{20}$.

(2) 该考生报考 A 大学达到优秀科目的个数设为X，

依题意，$X\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$，则$E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$，

该同学报考 B 大学达到优秀科目的个数设为Y，随机变量Y的可能取值为：0，1，2，3.

$P(Y=0)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}(1-n)=\frac{9(1-n)}{20}$, $P(Y=1)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}(1-n)+\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}(1-n)+\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}n=\frac{9}{20}$,

$P(Y=2)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}n+\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}n+\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}(1-n)=\frac{7n+2}{20}$，$P(Y=3)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}n=\frac{2n}{20}=\frac{n}{10}$,

随机变量Y的分布列：

Y	0	1	2	3
P	$\frac{9(1-n)}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{7n+2}{20}$	$\frac{n}{10}$

$E(Y)=\frac{13+20n}{20}$,

因为该考生更希望进入 A 大学的面试，则$E(Y)<E(X)$，即$\frac{13+20n}{20}<\frac{6}{5}$，解得$0<n<\frac{11}{20}$,

所以n的范围为：$0<n<\frac{11}{20}$

20.（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ，

（2）由题意知，$F(-1,0)$，

设直线 MN 方程：$x=my-1,M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),E(-4,y_1)$，

联立方程 $\begin{cases}x=my-1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

所以 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4},y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$，

所以 $-2my_1y_2=3(y_1+y_2)$，

又 $k_{EN}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2+4}$，

所以直线 EN 方程为：$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2+4}(x+4)$，

令 $y=0$，则 $x=-4-\dfrac{y_1(x_2+4)}{y_2-y_1}=-4-\dfrac{my_1y_2+3y_1}{y_2-y_1}=-4+\dfrac{\frac{3}{2}(y_1-y_2)}{y_2-y_1}=-4+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{5}{2}$.

所以直线 EN 过定点 $\mathrm{P}\left(-\dfrac{5}{2},0\right)$.

因为 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$ ，

所以 $S_{\text{V} OEN}=\dfrac{1}{2}|OP|\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}=\dfrac{15\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}=\dfrac{15\sqrt{m^2+1}}{3(m^2+1)+1}$ ，

令 $t=\sqrt{m^2+1},t\geq1$，则 $f(t)=\dfrac{15}{3t+\frac{1}{t}}$，

令 $g(t)=3t+\dfrac{1}{t},g'(t)=3-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{3t^2-1}{t_2}$，当 $t\geq1$ 时，$g'(t)\geq0$，

故 $g(t)=3t+\dfrac{1}{t}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

则 $f(t)=\dfrac{15}{3t+\frac{1}{t}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

即 $S_{\triangle OEN}=\dfrac{15t}{3t^2+1}=\dfrac{15}{3t+\frac{1}{t}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $t=1$ 时 $(S_{\triangle OEN})_{\max}=\dfrac{15}{4}$

21. 解：（1）当$x\in(0,\pi)$时，$f(x)=e^x-\lambda\sin x>0$，$\therefore \dfrac{e^x}{\sin x}>\lambda$

令$h(x)=\dfrac{e^x}{\sin x}$，$\therefore h'(x)=\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$

$\therefore$在$(0,\dfrac{\pi}{4})$上$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，在$(\dfrac{\pi}{4},\pi)$上$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

$\therefore h(x)=\dfrac{e^x}{\sin x}\ge h(\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}>1.4\times 2.19=3.066$，$\therefore$整数$\lambda\le 3$

（2）$\because g(x)=e^x+3\sin x-1-ax$　$\therefore g'(x)=e^x+3\cos x-a$　$\therefore g''(x)=e^x-3\sin x$

①$\because g(0)=0$，$\therefore x=0$是$g(x)$的一个零点

②当$x\in(0,+\infty)$时，由（1）知，当$x\in(0,\pi)$时，$g''(x)=e^x-3\sin x>0$，

又$\because$当$x\in[\pi,+\infty)$时，$g''(x)=e^x-3\sin x>e^{\pi}-3>0$

$\therefore g'(x)$在$(0,+\infty)$上递增，且$g'(0)=4-a>0$，

$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上递增，又$\because g(0)=0$，$\therefore$在$(0,+\infty)$上，$g(x)>0$，$g(x)$无零点

③当$x\in(-\pi,0)$时，$\because e^x>0$且$\sin x<0$，$\therefore g''(x)=e^x-3\sin x>0$，

$\therefore g'(x)$在$(-\pi,0)$上递增，又$\because g'(0)=4-a>0$，$g'(-\pi)=e^{-\pi}-3-a<0$，

$\therefore$存在$t\in(-\pi,0)$，使得$g'(t)=0$，

在$(-\pi,t)$上$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，在$(t,0)$上$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

又$\because g(-\pi)=e^{-\pi}-1+a\pi>-1+\pi>0$，$g(t)<g(0)=0$，$\therefore$在$(-\pi,t)$上，$g(x)$恰有一个零点

④当$x\in(-\dfrac{3\pi}{2},-\pi)$时，$\because \cos x<0$，$\therefore g'(x)=e^x+3\cos x-a<1-a<0$

$\therefore g(x)$在$x\in(-\dfrac{3\pi}{2},-\pi)$上递减，$g(x)>g(-\pi)>0$，$g(x)$无零点

⑤当 $x\in(-\infty,-\frac{3\pi}{2})$ 时，$g(x)=e^x+3\sin x-1-ax>0-3-1+\frac{3}{2}a\pi>\frac{3}{2}\pi-4>0$，$g(x)$ 无零点

综上所述：$g(x)$ 有两个零点

22（1）由题知，由 $\angle O_2ON=\frac{\pi}{3}$，可知 $O_2O=ON=1$,可得点 N 的极角为 $\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$，

所以 N 的极坐标为 $\left(1,\frac{4\pi}{3}\right)$.

（2）由题知 $|OK|=2$，$|OM|=2\sin\theta,\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\angle MOK=\theta-\frac{\pi}{3}$，

所以 $S_{\triangle MOK}=\frac{1}{2}|OK|\cdot|OM|\times\sin\angle MOK$

$=\frac{1}{2}\times2\times2\sin\theta\times\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{1-\cos2\theta}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta$

$=\frac{1}{2}-\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

因为 $\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $2\theta+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{7\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right)$，

所以 $S_{\triangle MOK}\in\left(0,\frac{3}{2}\right]$

23.（1）

由 $4a^2+b^2+16c^2=1.$，且 c 为正数，得 $4a^2+b^2<1$，则 $4ab<1$,即 $0<ab<\frac{1}{4}$

（2）由 $4ab<1$，

则 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{4abc^2}>\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$，

由柯西不等式可得：

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(4a^2+b^2+16c^2\right)\geq\left(\frac{1}{a}\times2a+\frac{1}{b}\times b+\frac{1}{c}\times4c\right)^2=49$，

当且仅当 $\sqrt{2}a=b=2c$ 时，等号成立，

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{4abc^2}>49.$