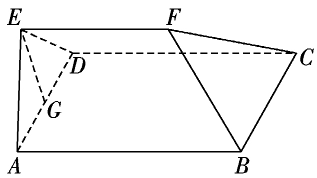
2020届高三八校第一次联考·文数

参考答案、提示及评分细则

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	D	B	B	D	C	A	B	B	B	C

11. 答案:B



解析:由三视图还原原几何体知,羡除 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB // EF$,底面 $ABCD$ 是矩形,$AB=CD=2$,$EF=1$,平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$,AB,CD 间的距离 $h=AD=2$,如图,取 AD 中点 G,连接 EG,则 $EG \perp$ 平面 $ABCD$,由侧视图知直线 EF 到平面 $ABCD$ 的距离为 $h'=1$,所以该羡除的体积为 $V=\frac{hh'}{6}(a+b+c)=\frac{1\times 2}{6}(2+2+1)=\frac{5}{3}$.

12. 答案:C

解析:设直线 AB 的方程为 $x=ty+m$,点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线 AB 与 x 轴的交点为 $M(m,0)$.

联立 $\begin{cases} x=ty+m \\ y^2=x \end{cases}$ 可得 $y^2-ty-m=0$.

根据根与系数的关系,得 $y_1\cdot y_2=-m$.

$\because \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$,$\therefore x_1x_2+y_1y_2=2$,

即 $(y_1y_2)^2+y_1y_2-2=0$.

$\because A,B$ 位于 x 轴的两侧,$\therefore y_1y_2=-2$. $\therefore m=2$.

设点 A 在 x 轴的上方,则 $y_1>0$.

$\because F(\frac{1}{4},0)$,$\therefore S_1+4S_2=\frac{1}{2}\cdot 2(y_1-y_2)+4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}y_1=\frac{3y_1}{2}+\frac{2}{y_1}\geqslant 2\sqrt{3}$.

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. $\frac{3}{2}$　　14. 5　　15. ①②③　　16. $\frac{10\sqrt{6}}{27}$

15. 解析：对于①，由正弦定理得$\frac{4}{\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}$，所以 $\sin C=\frac{3}{8}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 $0^\circ<C<120^\circ$，所以 $0^\circ<C<60^\circ$，所以角 C 只有一解，所以①正确；

对于②，因为 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=8$，即 $a c\cos B=8$，所以 $ac=16$，由$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bh_{AC}$，可得 $h_{AC}=2\sqrt{3}$，所以②正确；

对于③，由余弦定理 $a^2+c^2-2ac\cos B=b^2$，得 $a^2+c^2-ac=16$，所以$(a+c)^2=a^2+c^2+2ac=16+3ac\leqslant16+3(\frac{a+c}{2})^2$，当且仅当 $a=c$ 时，等号成立，所以$(a+c)^2\leqslant64$，所以 $4<a+c\leqslant8$，所以③正确. 故答案为①②③.

16. 解析：因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$，

又 $AD\perp AB$，$PA\cap AD=A$，所以 $AB\perp$平面 PAD.

又因为 $PD\subset$平面 PAD，所以 $AB\perp PD$.

同理可得 $CD\perp$平面 PAD，又因为 $CD\cap MC=C$，CD，$MC\subset$平面 PCD，所以 $CD\perp AM$.

由题意可知. $MC\perp AM$，又因为 $CD\cap MC=C$，CD，$MC\subset$平面 PCD，

所以 $AM\perp$平面 PCD，又因为 $AM\subset$平面 ABM，所以平面 $ABM\perp$平面 PCD.

连接 AN，$AM\perp PD$，$CD\perp MD$，

又 $PA=AD=4$，所以 M 是 PD 的中点，$AM=2\sqrt{2}$，

所以 $MC=\sqrt{MD^2+CD^2}=2\sqrt{3}$，

同理可得 $PC=\sqrt{PA^2+AB^2+BC^2}=6$，

由题意可知，$AN\perp NC$，则 $Rt\triangle ANP\backsim Rt\triangle CAP$，所以$\frac{PN}{PA}=\frac{PA}{PC}$，

所以 $PN=\frac{8}{3}$，$NC=\frac{10}{3}$，$AN=\frac{PA\cdot AC}{PC}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

设点 D 到平面 PAC 的距离为 d_1，点 M 到平面 ACN 的距离为 d_2，点 N 到平面 ACM 的距离为 d_3，

由 $V_{P-ACD}=V_{D-PAC}$，得 $d_1=\frac{S_{\triangle ACD}\cdot PA}{S_{\triangle PAC}}=\frac{\frac{1}{2}\times4\times2\times4}{\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

因为 M 是 PD 的中点，所以 $d_2=\frac{1}{2}d_1=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

由 $V_{N-ACM}=V_{M-ACN}$,

得 $d_3=\dfrac{S_{\triangle ACN}\cdot d_2}{S_{\triangle ACM}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{5}}{3}\times\frac{10}{3}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}}=\dfrac{10\sqrt{6}}{27}$,

所以点 N 到平面 ACM 的距离为$\dfrac{10\sqrt{6}}{27}$.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解析:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $d\in\mathbf{Z}$,

由题意知,$\{S_n\}$的最小值为 S_5,则$\begin{cases}a_5\leqslant 0\\a_6\geqslant 0\end{cases}$, ………………………………………… 2 分

$\because a_1=-9$,所以$\begin{cases}4d-9\leqslant 0\\5d-9\geqslant 0\end{cases}$,解得$\dfrac{9}{5}\leqslant d\leqslant\dfrac{9}{4}$,$\because d\in\mathbf{Z}$,$\therefore d=2$, ……………………… 4 分

因此 $a_n=a_1+(n-1)d=-9+2(n-1)=2n-11$; ……………………………… 6 分

(2)$\because b_n=\dfrac{1}{(2n-9)(2n-11)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(2n-11)}-\dfrac{1}{(2n-9)}\right]$ …………………………… 8 分

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{9}-(-\dfrac{1}{7})+(-\dfrac{1}{7})-(-\dfrac{1}{5})+\cdots+\dfrac{1}{(2n-11)}-\dfrac{1}{(2n-9)}\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{(2n-9)}\right]=-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{(2n-9)}\right]=-\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{4n-18}=\dfrac{n}{9(9-2n)}$. ……………… 12 分

18. 解析:(1)证明:因为 G 为 AE 中点,$AD=DE=2$,所以 $DG\perp AE$.

因为平面 $ADE\perp$平面 $ABCE$,平面 $ADE\cap$平面 $ABCE=AE$,$DG\subset$平面 ADE,

所以 $DG\perp$平面 $ABCE$. 又因为 $BC\subset$平面 $ABCE$,故 $DG\perp BC$ ……………………………… 4 分

(2)在直角三角形 ADE 中,易求 $AE=2\sqrt{2}$,则 $DG=\dfrac{AD\cdot DE}{AE}=\sqrt{2}$.

所以四棱锥 $D-ABCE$ 的体积为 $V_{D-ABCE}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{(1+4)\times 2}{2}\times\sqrt{2}=\dfrac{5}{3}\sqrt{2}$. ……………… 8 分

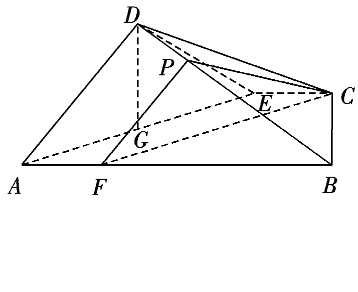
(3) 过点 C 作 $CF/\!/AE$ 交 AB 于点 F,则 $AF:FB=1:3$.

过点 F 作 $FP/\!/AD$ 交 DB 于点 P,连接 PC,则 $DP:PB=1:3$.

又因为 $CF/\!/AE$,$AE\subset$平面 ADE,$CF\not\subset$平面 ADE,

所以 $CF/\!/$平面 ADE.

同理 $FP/\!/$平面 ADE. 又因为 $CF\cap PF=F$,

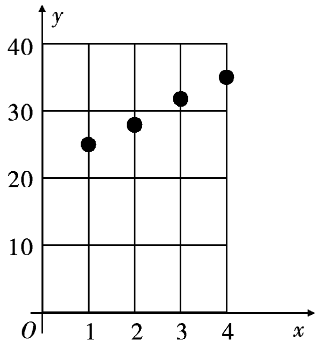


所以平面 CFP // 平面 ADE.

因为 $CP \subset$ 平面 CFP ，所以 CP // 平面 ADE.

所以在 BD 上存在点 P,使得 CP // 平面 ADE,且 $\frac{BP}{BD}=\frac{3}{4}$. ………………………………… 12 分

19. 解析:(1)由表格中的数据得散点图:



………………………………………………………………………………………… 3 分

(2)根据表格中的数据可得: $\bar{x}=\frac{1+2+3+4}{4}=\frac{5}{2}$, $\bar{y}=\frac{25+28+32+35}{4}=30$, ………………… 5 分

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_iy_i-4\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{4}x_i^2-4\bar{x}^2}=3.4$, $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=30-3.4\times\frac{5}{2}=21.5$. ………………………… 9 分

故 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=3.4x+21.5$, ………………………………………… 10 分

当 $x=5$ 时, $\hat{y}=38.5$(百元), $\because 3850>3800$, $\therefore$ 预测 A 户在 2020 年能脱贫. ………………… 12 分

20. 解析:(1)由题意得 $\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ 解得 $a^2=8$, $b^2=2$,所以椭圆的方程为 $C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. ………… 4 分

(2)设直线 $l:y=\frac{1}{2}x+m$,由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+m\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$,消去 y 得 $x^2+2mx+2m^2-4=0$, $\Delta=4m^2-8m^2+16>0$,

解得 $-2<m<2$. 当 $m=0$ 时, $y=\frac{1}{2}x$(舍),

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-2m$, $x_1\cdot x_2=2m^2-4$, ………………………… 6 分

由题意,易知 PA 与 PB 的斜率存在,所以 $\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}$. 设直线 PA 与 PB 的斜率分别为 k_1,k_2,

则 $\tan\alpha=k_1$, $\tan\beta=k_2$,要证 $\alpha+\beta=\pi$,即证 $\tan\alpha=\tan(\pi-\beta)=-\tan\beta$,只需证 $k_1+k_2=0$,

$\because k_1=\frac{y_1-1}{x_1-2}$, $k_2=\frac{y_2-1}{x_2-2}$,

故 $k_1+k_2=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}=\dfrac{(y_1-1)(x_2-2)+(y_2-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$, ………………………………… 8 分

又 $y_1=\dfrac{1}{2}x_1+m, y_2=\dfrac{1}{2}x_2+m$,

所以 $(y_1-1)(x_2-2)+(y_2-1)(x_1-2)=(\dfrac{1}{2}x_1+m-1)(x_2-2)+(\dfrac{1}{2}x_2+m-1)(x_1-2)$

$=x_1\cdot x_2+(m-2)(x_1+x_2)-4(m-1)=2m^2-4+(m-2)(-2m)-4(m-1)=0$,

$\therefore k_1+k_2=0, \alpha+\beta=\pi$. ……………………………………………………………………… 12 分

21. 解析:(1)$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x-a}{x^2}(a\in\mathbf{R})$.

当 $a\leqslant 0$ 时, $f'(x)\geqslant 0$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $a>0$ 时, $x\in(0,a)$ 时, $f'(x)<0$, 单调递减, $x\in(a,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, 单调递增.

综上所述:当 $a\leqslant 0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $a>0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减,函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增. ……………… 4 分

(2)由已知可得方程 $\ln x-e^x+ax-a=0$ 有唯一解 x_0, 且 $x_0\in(n,n+1)$, $n\in\mathbf{N}^*$.

设 $h(x)=\ln x-e^x+ax-a(x>0)$, 即 $h(x)=0$ 有唯一解 x_0, $x_0\in(n,n+1)$, $n\in\mathbf{N}^*$

由 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-e^x+a$, 令 $g(x)=h'(x)=\dfrac{1}{x}-e^x+a$, 则 $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-e^x<0$, …………… 6 分

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 即 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

又 $x\to 0$ 时, $h'(x)\to+\infty$; $x\to+\infty$ 时, $h'(x)\to-\infty$,

故存在 $t_0\in(0,+\infty)$ 使得 $h'(t_0)=\dfrac{1}{t_0}-e^{t_0}+a=0$.

当 $x\in(0,t_0)$ 时, $h'(x)>0$, $h(x)$ 在 $(0,t_0)$ 上单调递增,

$x\in(t_0,+\infty)$ 时, $h'(x)<0$, $h(x)$ 在 $(t_0,+\infty)$ 上单调递减.

又 $h(x)=0$ 有唯一解,则必有 $h(t_0)=\ln t_0-e^{t_0}+at_0-a=0$

当 $x\to 0$ 时, $h(x)\to-\infty$, 故存在唯一的 $x_0=t_0$ 满足下式:

由 $\begin{cases}\dfrac{1}{x_0}-e^{x_0}+a=0\\ \ln x_0-e^{x_0}+ax_0-a=0\end{cases}$ 消去 a 得 $\ln x_0-e^{x_0}+(x_0-1)(e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0})=0$. ……………………… 8 分

令 $\varphi(x)=\ln x-e^x+(x-1)(e^x-\dfrac{1}{x})=\ln x-2e^x+xe^x+\dfrac{1}{x}-1$,

则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-2e^x+e^x+xe^x-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}+(x-1)e^x=(x-1)(\dfrac{1}{x^2}+e^x)$.

故当 $x\in(0,1)$ 时, $\varphi'(x)<0$, $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,

当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $\varphi'(x)>0$, $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

由 $\varphi(1)=-\mathrm{e}<0,\varphi(2)=-\frac{1}{2}+\ln 2>0$，…………………………………………………… 10 分

即存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $\varphi(x_0)=0$，即 $h(x_0)=0$.

又关于 x 的方程 $f(x)=\mathrm{e}^x+\frac{a}{x}-ax$ 有唯一实数解 x_0，且 $x_0\in(n,n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore x_0\in(1,2)$. 故 $n=1$. …………………………………………………………………… 12 分

22. 解析：(1) 因为直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\cos\alpha\\ y=\sqrt{3}+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，直线 l 的直角坐标方程为 $x=2$.

当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，直线 l 的直角坐标方程为 $y-\sqrt{3}=\tan\alpha(x-2)$. ………………………… 3 分

因为 $\rho^2=x^2+y^2,\rho\cos\theta=x$，因为 $\rho^2=2\rho\cos\theta+8$，所以 $x^2+y^2=2x+8$.

所以 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x-8=0$. ……………………………………………………… 5 分

(2) 解法 1：曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x-8=0$，

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的方程整理，得 $t^2+(2\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos\alpha)t-5=0$.

因为 $\Delta=(2\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos\alpha)^2+20>0$，可设该方程的两个根为 t_1,t_2，

则 $t_1+t_2=-(2\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos\alpha)$，

所以 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{[-(2\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos\alpha)]^2+20}=4\sqrt{2}$. ……… 8 分

整理得 $(\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha)^2=3$，故 $2\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\pm\sqrt{3}$.

因为 $0\leqslant\alpha<\pi$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ 或 $\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$，解得 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 或 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，

综上所述，直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{2}$. ……………………………………………………… 10 分

解法 2：直线 l 与圆 C 交于 A,B 两点，且 $|AB|=4\sqrt{2}$，

故圆心 $C(1,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\sqrt{9-(2\sqrt{2})^2}=1$.

①当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，直线 l 的直角坐标方程为 $x=2$，符合题意. ……………………………………… 7 分

②当 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，直线 l 的方程为 $x\tan\alpha-y+\sqrt{3}-2\tan\alpha=0$.

所以 $d=\frac{|\tan\alpha-0+\sqrt{3}-2\tan\alpha|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=1$，整理得 $|\sqrt{3}-\tan\alpha|=\sqrt{1+\tan^2\alpha}$. 解得 $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

综上所述，直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{2}$. ……………………………………………………… 10 分

23. 解析:(1)3^{π},π^3 两数同取以 e 为底的对数,即比较 $\pi\ln 3$ 与 $3\ln \pi$ 的大小,亦即比较$\frac{\ln 3}{3}$与$\frac{\ln \pi}{\pi}$的大小,

下面构造函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$,$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,$f'(x)=0$,解得 $x=\mathrm{e}$,

$f(x)$在$(0,\mathrm{e})$单调递增,$(\mathrm{e},+\infty)$单调递减,即$f(3)>f(\pi)$,故 $3^{\pi}>\pi^3$. ………………………… 5 分

(2)证明:因为$2\sqrt{ab}\leqslant a+b=\frac{1}{2}$,所以$\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{4}$,

又因为$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}=\frac{1}{2}+2\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

即可得$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 1$,所以原不等式成立. ……………………………………………………………… 10 分