

# 2022—2023 学年度第一学期期中检测试题

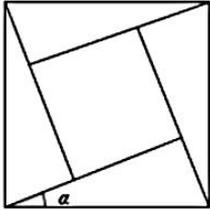
## 高三数学

2022.11.9

(全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟)

一、单项选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求)

- 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合  $M = \{1, 2\}$ ， $N = \{1, 2, 3, 4\}$ ，则  $(C_U M) \cap N =$ 
  - $\{5\}$
  - $\{3, 4\}$
  - $\{3, 4, 5\}$
  - $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\frac{1 - \tan 15^\circ}{1 + \tan 15^\circ}$  的值为
  - 1
  - $\sqrt{3}$
  - $\frac{\sqrt{3}}{3}$
  - $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 古希腊数学家阿基米德的墓碑，上刻着一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等，相传这个图形表达了阿基米德最引以为自豪的发现，即：圆柱的内切球体积与圆柱体积比为定值，则该定值为
  - $\frac{1}{2}$
  - $\frac{2}{3}$
  - $\frac{3}{4}$
  - $\frac{3}{2}$
- $(x-2)(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}})^6$  的展开式中  $x$  的系数为
  - 280
  - 40
  - 40
  - 280
- 我国古代数学家赵爽在注解《周髀算经》一书时介绍了“赵爽弦图”，它是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的大正方形如图所示，记直角三角形较小的锐角为  $\alpha$ ，大正方形的面积为  $S_1$ ，小正方形的面积为  $S_2$ ，若  $\frac{S_1}{S_2} = 5$ ，则  $\sin \alpha + \cos \alpha$  的值为
 



  - $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
  - $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
  - $\frac{7}{5}$
  - $\frac{8}{5}$
- 已知函数  $f(x)$  的导函数  $f'(x)$  满足  $f'(x) = f(x)$ ，则不等式  $f(x) > 2e^3 \cos x$  在区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  上的解集为
  - $(0, \frac{\pi}{6})$
  - $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$
  - $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$
  - $(0, \frac{\pi}{3})$
- 甲、乙、丙、丁四人各掷骰子 5 次(骰子出现的点数可能为 1, 2, 3, 4, 5, 6)，并分别记录自己每次出现的点数，四人根据统计结果对自己的试验数据分别做了如下描述，可以判断一定出现 6 点的描述是
  - 中位数为 4，众数为 4
  - 中位数为 3，极差为 4

- C. 平均数为 3, 方差为 2                      D. 平均数为 4, 25 百分位数为 2

8. 若  $a = \frac{9e}{8}$ ,  $b = (\frac{10}{9})^{10}$ ,  $c = e^9$ , 其中  $e$  为自然对数的底数, 则  $a, b, c$  的大小关系为

- A.  $a < b < c$               B.  $b < c < a$               C.  $c < b < a$               D.  $c < a < b$

二、多项选择题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分)

9. 设函数  $f(x), g(x)$  的定义域都为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(x) > 0, g(x) > 0, f(x)$  是减函数,  $g(x)$  是增函数, 则下列说法中正确的有

- A.  $f(x) + g(x)$  是增函数                      B.  $f(x) - g(x)$  是减函数  
C.  $f(x)g(x)$  是增函数                      D.  $\frac{f(x)}{g(x)}$  是减函数

10. 下列说法中正确的有

- A. 若  $a > b > 0$ , 则  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$                       B. 若  $a < b < 0, c < d$ , 则  $ac < bd$   
C. 若  $a < b, c < d$ , 则  $a - d < b - c$                       D. 若  $a^3 < b^3$ , 则  $a^2 < b^2$

11. 已知奇函数  $f(x) = \sqrt{3}\sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$ ) 的最小正周期为  $\pi$ , 将函数  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位, 得到函数  $g(x)$  的图象, 则下列说法中正确的有

- A. 函数  $g(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{5\pi}{12}$  对称  
B. 当  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时, 函数  $g(x)$  的最小值是  $-\sqrt{3}$   
C. 函数  $g(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$  上单调递增  
D. 若函数  $y = g(x) - k(x - \frac{\pi}{6})$  有且仅有 3 个零点, 则所有零点之和为  $\frac{\pi}{2}$

12. 已知函数  $f(x)$  及其导函数  $f'(x)$  的定义域都为  $\mathbf{R}$ ,  $f(0) = 0, f(1 - 2x) = f(2x - 1), f(1 - x^2) - f(1 + x^2) + 4x^2 = 0$ , 则下列说法中正确的有

- A. 导函数  $f'(x)$  为奇函数                      B. 2 是函数  $f(x)$  的一个周期  
C.  $f(2k) = 4k^2 (k \in \mathbf{Z})$                       D.  $f(2023) = 4046$

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ , 则  $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{3}) =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知直线  $y = kx$  曲线  $y = \log_2 x$  的切线, 则实数  $k =$  \_\_\_\_\_.

15. 图 1 是一枚质地均匀的骰子, 图 2 是一个正六边形(边长为 1 个单位)棋盘, 现通过掷骰子的方式玩跳棋游戏, 规则是: 先将一棋子放在正六边形  $ABCDEF$  的顶点  $A$  处. 如果掷出的点数为  $i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ , 则棋子就按

顺时针方向行走  $i$  个单位，一直循环下去. 则某人抛掷两次骰子后棋子恰好有又回到点  $A$  处的所有不同走法共有种.



图 1

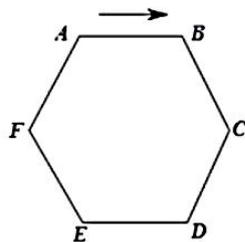


图 2

16. 中国古代数学名著《九章算术》中将底面为矩形且有一条侧棱垂直于底面的四棱锥称为“阳马”. 现有一“阳马”的底面是边长为 3 的正方形，垂直于底面的侧棱长为 4，则该“阳马”的内切球表面积为\_\_\_\_\_，内切球的球心和外接球的球心之间的距离为\_\_\_\_\_.

四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

已知命题:  $\forall x \in [0, 1], x^2 + x - m < 0$  是真命题.

(1) 求实数  $m$  的取值集合  $A$ ;

(2) 设集合  $B = \{x | \frac{ax-1}{x+2} > 0\}$  (其中  $a > 0$ ), 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件, 求实数  $a$  的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = m \cdot 2^x + \frac{1}{2^x}$  是  $\mathbf{R}$  上的奇函数.

(1) 求实数  $m$  的值;

(2) 若存在实数  $t \in [0, 2]$ , 使得  $f(t^2 - k) + f(2 - kt) \geq 0$  成立, 求实数  $k$  的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

在平面四边形  $ABCD$  中,  $\angle A=120^\circ$ ,  $AB=AD$ ,  $BC=2$ ,  $CD=3$ .

(1)若  $\cos\angle CBD=\frac{11}{16}$ , 求  $\sin C$ ;

(2)记四边形  $ABCD$  的面积为  $S$ , 求  $S$  的最大值.

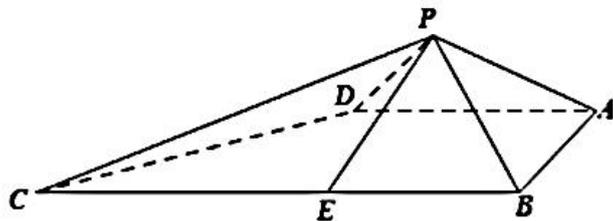


20. (本小题满分 12 分)

如图, 在体积为 1 的四棱锥  $P-ABCD$  中,  $\angle ABC=90^\circ$ ,  $AD\parallel BC$ ,  $AD=AB=\sqrt{2}$ ,  $BC=2\sqrt{2}$ ,  $CD\perp PB$ ,  $PB=PD$ .

(1)证明: 平面  $PBD\perp$  平面  $ABCD$ ;

(2)若点  $E$  为棱  $BC$  上一动点, 求直线  $PE$  与平面  $PAD$  所成角的正弦值的最大值.



21. (本小题满分 12 分)

甲、乙两名学生进行“趣味投篮比赛”, 制定比赛规则如下: 每轮比赛中甲、乙两人各投一球, 两人都投中或者都未投中则均记 0 分; 一人投中而另一人未投中, 则投中的记 1 分, 未投中的记 -1 分. 设每轮比赛中甲投中的概率为  $\frac{2}{3}$ , 乙投中的概率为  $\frac{1}{2}$ , 甲、乙两人投篮相互独立, 且每轮比赛互不影响.

(1)经过 1 轮比赛, 记甲的得分为  $X$ , 求  $X$  的分布列和期望;

(2)经过 3 轮比赛, 用  $P_n(n=1, 2, 3)$  表示第  $n$  轮比赛后甲累计得分低于乙累计得分的概率, 研究发现点  $(n, P_n)(n=$

1, 2, 3)均在函数  $f(x)=m(s-t^x)$  的图象上, 求实数  $m, s, t$  的值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x)=(x-ae^{2x}+2)e^x$ , 其中  $e$  为自然对数的底数.

(1)当  $a=0$  时, 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2)当  $a>0$  时,

(i)若  $f(x)\leq 1$  恒成立, 求实数  $a$  的最小值;

(ii)若  $f(x)$  存在最大值, 求实数  $a$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: [www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。

