重庆市高2023届高三第九次质量检测

数学试题

2023.5

命审单位:重庆南开中学

注意事项:

1. 本试卷满分150分,考试时间120分钟。
2. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共8小题.每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=x^2\}$,集合 $B=\{(x,y)\mid y=1-|x|\}$,则集合 $A\cap B$ 的元素个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 已知直线 l 的一个方向向量为 $\vec{p}=\left(\sin\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{3}\right)$,则直线 l 的倾斜角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

3. 已知 a,b 为实数,则使得"$a>b>0$"成立的一个充分不必要条件为

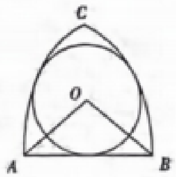
A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\ln(a+1)>\ln(b+1)$

C. $a^3>b^3$　　D. $\sqrt{a-1}>\sqrt{b-1}$

4. "学如逆水行舟,不进则退;心似平原跑马,易放难收"(明·《增广贤文》)是勉励人们专心学习的.如果每天的"进步"率都是1%,那么一年后是 $(1+1\%)^{365}=1.01^{365}$;如果每天的"退步"率都是1%,那么一年后是 $(1-1\%)^{365}=0.99^{365}$.一年后"进步"的是"退步"的 $\frac{1.01^{365}}{0.99^{365}}=\left(\frac{1.01}{0.99}\right)^{365}\approx1481$ 倍.如果每天的"进步"率和"退步"率都是20%,那么大约经过(　　)天后"进步"的是"退步"的一万倍.($\lg2\approx0.3010$,$\lg3\approx0.4771$)

A. 20　　B. 21　　C. 22　　D. 23

5. 哥特式建筑是1140年左右产生于法国的欧洲建筑风格,它的特点是尖塔高耸、尖形拱门、大窗户及绘有故事的花窗玻璃,如图所示的几何图形,在哥特式建筑的尖形拱门与大窗户中较为常见,它是由线段 AB 和两个圆弧 AC、BC 围成,其中一个圆弧的圆心为 A,另一个圆弧的圆心为 B,圆 O 与线段 AB 及两个圆弧均相切,若 $AB=2$,则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$



A. $-\frac{7}{16}$　　B. $-\frac{2}{7}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{4}{7}$

6. 将函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin x$ 的图像向左平移 $a(a>0)$ 个单位后的函数图像关于 y 轴对称,则实数 a 的最小值为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

7. 若$(mx-1)^n(n\in\mathbf{N}^*)$的展开式中，所有项的系数和与二项式系数和相等，且第6项的二项式系数最大，则有序实数对(m,n)共有(　　)组不同的解

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 已知O为坐标原点，椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，平行四边形$OACB$的三个顶点$A,B,C$在椭圆$E$上，若直线$AB$和$OC$的斜率乘积为$-\frac{1}{2}$，四边形$OACB$的面积为$\frac{3\sqrt{6}}{2}$，则椭圆$E$的方程为

A. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$　　C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$　　D. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得5分，部分选对得2分，有选错得0分.

9. 下列命题正确的有

A. 空间中两两相交的三条直线一定共面

B. 已知不重合的两个平面α,β，则存在直线$a\subset\alpha,b\subset\beta$，使得$a,b$为异面直线

C. 过平面α外一定点P，有且只有一个平面β与α平行

D. 已知空间中有两个角$\angle A_1B_1C_1$，$\angle A_2B_2C_2$，若直线$A_1B_1\perp$直线A_2B_2，直线$B_1C_1\perp$直线B_2C_2，则$\angle A_1B_1C_1=\angle A_2B_2C_2$或$\angle A_1B_1C_1+\angle A_2B_2C_2=\pi$

10. 学校北园食堂老麻抄手窗口又推出了酸辣粉、米粉等新品. 小明同学决定每隔9天去老麻抄手窗口消费一次，连续去了5次，他发现这5次的日期中没有星期天，则小明同学在这5次中第一次去北园食堂可能是

A. 星期一　　B. 星期三　　C. 星期五　　D. 星期六

11. 某项科学素养测试规则为：系统随机抽取5道测试题目，规定：要求答题者达到等级评定要求或答完5道题方能结束测试. 若答题者连续做对4道，则系统立即结束测试，并评定能力等级为A；若连续做错3道题目，则系统自动终止测试，评定能力等级为C；其它情形评定能力等级为B. 已知小华同学做对每道题的概率均为$\frac{2}{3}$，且他每道题是否答对相互独立，则以下说法正确的是

A. 小华能力等级评定为A的概率为$\frac{64}{243}$

B. 小华能力等级评定为B的概率为$\frac{158}{243}$

C. 小华只做了4道题目的概率为$\frac{2}{9}$

D. 小华做完5道题目的概率为$\frac{16}{27}$

12. 已知函数$f(x)=ax+\frac{b}{x}(ab\neq0)$，则下列说法正确的有

A. $\forall ab\neq0$，函数$f(x)$是奇函数

B. $\exists ab\neq0$，使得过原点O至少可以作$f(x)$的一条切线

C. $\forall ab\neq0$，方程$f(\sin x)=f(\sin x+2)$一定有实根

D. $\exists ab\neq0$，使得方程$\sin[f(x)]=\cos[f(x)]$有实根

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 复数 z 满足 $|z-1+\mathrm{i}|=1$，其中 i 为虚数单位，则 $|z|$ 的最大值为________.

14. $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列，前 n 项和为 S_n，若 $S_5=15$，a_3,a_6,a_{12} 成等比数列，则 $\dfrac{S_{2023}}{a_{2023}}=$________.

15. 函数 $f(x)=\cos 2x+2|\sin x|\ (x\in[0,2\pi])$ 的值域为________.

16. 若函数 $f(x)=ax^3-\dfrac{1}{3}(a>0)$ 与函数 $g(x)=x^2-\dfrac{2}{3}cx$ 的图像恰有三个不同交点，且交点的横坐标构成等差数列，则实数 a 的取值范围是________.

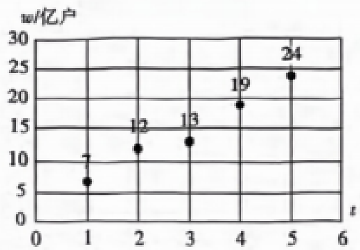
四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，已知 $b\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)+a\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+B\right)=0$.

(1) 求角 A 的大小；

(2) 点 D 为边 BC 上一点（不包含端点），且满足 $\angle ADB=2\angle ACB$，求 $\dfrac{DC}{BC}$ 的取值范围.

18. 移动物联网广泛应用于生产制造、公共服务、个人消费等领域. 截至2022年底，我国移动物联网连接数达18.45亿户，成为全球主要经济体中首个实现“物超人”的国家. 右图是2018－2022年移动物联网连接数 w 与年份代码 t 的散点图，其中年份2018－2022对应的 t 分别为1～5.



(1) 根据散点图推断两个变量是否线性相关. 计算样本相关系数（精确到0.01），并推断它们的相关程度；

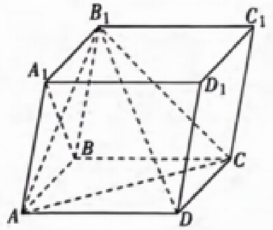
(2) 求 w 关于 t 的经验回归方程，并预测2024年移动物联网连接数.

附：样本相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(w_i-\bar{w})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(w_i-\bar{w})^2}}$，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(w_i-\bar{w})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}$，$\hat{a}=\bar{w}-\hat{b}\cdot\bar{t}$，$\sqrt{1740}\approx41.7$

19. 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 和侧面 ABB_1A_1 都是边长为 2 的菱形，平面 $ABCD\perp$ 平面 ABB_1A_1，$A_1B\perp B_1D$.

(1)求证：四边形 $ABCD$ 是正方形；

(2)若 $\angle A_1AB=60°$，求二面角 $A-B_1C-B$ 的余弦值.



20. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $3a_n=2(S_n+2n)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)证明：数列 $\{a_n+2\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=\log_3\dfrac{a_n+2}{2}$，证明：$\left(1+\dfrac{1}{b_1}\right)\left(1+\dfrac{1}{b_3}\right)\left(1+\dfrac{1}{b_5}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{b_{2n-1}}\right)>\sqrt{b_{2n+1}}$.

21. 已知点 $F(0,1)$，动点 M 在直线 $l:y=-1$ 上，过点 M 且垂直于 x 轴的直线与线段 MF 的垂直平分线交于点 P，记点 P 的轨迹为曲线 C.

(1)求曲线 C 的标准方程；

(2)过 F 的直线与曲线 C 交于 A,B 两点，直线 OA,OB 与圆 $x^2+y^2-2y=0$ 的另一个交点分别为 D,E，求 $\triangle DOE$ 与 $\triangle AOB$ 面积之比的最大值.

22. 对于定义在 D 上的函数 $F(x)$，若存在 $x_0\in D$，使得 $F(x_0)=x_0$，则称 x_0 为 $F(x)$ 的一个不动点. 设函数 $f(x)=(x-1)e^x-a\ln x+x$，已知 $x_0(x_0\neq1)$ 为函数 $f(x)$ 的不动点.

(1)求实数 a 的取值范围；

(2)若 $k\in\mathbf{Z}$，且 $kx_0<a$ 对任意满足条件的 x_0 成立，求整数 k 的最大值.

（参考数据：$\ln 2\approx0.693$，$\ln 3\approx1.1$，$e^{\frac{2}{3}}\approx1.95$，$e^2\approx7.39$，$e^{\frac{3}{2}}\approx4.48$）