

2023 届高三年级 4 月份大联考

数学参考答案及解析

一、单选题

1. C 【解析】 $B = \{x | 2 \leq 2^x \leq 8\} = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, 所以 $A \cap B = \{x | x > 2\} \cap \{x | 1 \leq x \leq 3\} = (2, 3]$. 故选 C.

2. A 【解析】 $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y > 0 \Rightarrow x^3 > y^3$, 故充分性成立; 若 $x^3 > y^3$, 比如 $x = -1, y = -2$, 此时 $\ln x, \ln y$ 不存在, 故必要性不成立, 所以“ $\ln x > \ln y$ ”是“ $x^3 > y^3$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

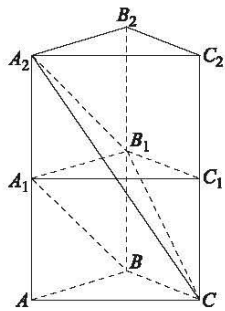
3. C 【解析】2021 年 7 月至 2022 年 7 月全国居民消费价格环比增长率的极差为 $0.7\% - (-0.3\%) = 1\%$, 所以①正确; 2021 年 7 月至 2022 年 7 月全国居民消费价格同比增长率的中位数与众数均为 1.5% , 所以②正确; 从同比增长率看, 2022 年 1 月与 2022 年 2 月全国居民消费价格同比增长率均为 0.9% , 但 2021 年 1 月与 2021 年 2 月全国居民消费价格未知, 即不一定相同, 所以 2022 年 1 月与 2022 年 2 月全国居民消费价格不一定相同, 所以③错误; 从环比增长率看, 2022 年 6 月全国居民消费价格增长率为 0 , 所以 2022 年 6 月全国居民消费价格与 2022 年 5 月全国居民消费价格相同, 所以④正确. 故选 C.

4. C 【解析】 $T = \frac{2\pi}{\omega}, f(T) = \cos(2\pi + \varphi) = \cos\varphi = \frac{1}{2}$, 因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 则 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$), 因为 $x = \frac{7\pi}{3}$ 为函数 $f(x)$ 的极值点, 所以 $\frac{7\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\omega = \frac{3k-1}{7}, k \in \mathbf{Z}$, 又因为 $\omega > 0$,

所以当 $k=1$ 时, $\omega_{\min} = \frac{2}{7}$. 故选 C.

5. A 【解析】因为 $f(x) = \sin(x^3 - x)$ 为奇函数, 所以图象关于原点对称, 故排除 C, D. 因为 $f(1) = 0$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < 0$, 所以排除 B, 故选 A.

6. D 【解析】在正三棱柱的正上方补一个与之全等的正三棱柱 $A_2B_2C_2 - A_1B_1C_1$, 则 $A_2B_1 \parallel A_1B$, 所以 $\angle A_2B_1C$ (或其补角) 为直线 A_1B 与 B_1C 所成的角, 设正三棱柱高为 h , 所以 $\cos \angle A_2B_1C = \frac{2(\sqrt{1+h^2})^2 - (\sqrt{1+4h^2})^2}{2(\sqrt{1+h^2})^2} = \pm \frac{1}{3}$, 所以 $h = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $h = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 所以正三棱柱的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 1 \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{16}$. 故选 D.



7. A 【解析】 $\because 2\ 000 < 2\ 023 < 2\ 048, \therefore \lg 2\ 000 < \lg 2\ 023 < \lg 2\ 048, \therefore 3 + \lg 2 < \lg 2\ 023 < 11\lg 2,$
 $\therefore \frac{3 + \lg 2}{21\lg 2} < \frac{\lg 2\ 023}{\lg 4} < \frac{11}{2}$, 因为 $f(x) = \frac{3+x}{2x} = \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $\frac{3 + \lg 2}{21\lg 2} > \frac{3 + \lg 3}{21\lg 3} = \log_3 3\ 000$, 又因为 $\frac{11 \times 1.001^{0.01}}{2} > \frac{11 \times 1}{2} = \frac{11}{2}$, 所以



$$\log_3 3000 = \frac{3+\lg 3}{2\lg 3} < \frac{3+\lg 2}{2\lg 2} < \frac{\lg 2023}{\lg 4} < \frac{11}{2} < \frac{11 \times 1.001^{0.01}}{2}, \text{ 所以 } a < b < c. \text{ 故选 A.}$$

8. D 【解析】因为函数 $f(x) = x^2 - 4x$ 表示的抛物线与 x 轴围成的面积为定值, 所以直线 l 、曲线 $f(x)$ 、 x 轴及 y 轴围成的图形的面积取得最小值, 等价于三角形 BOC 的面积取得最小值. 设 $P(x_0, x_0^2 - 4x_0)$, 所以切线 l 的斜率为 $2x_0 - 4$, 所以切线方程为 $y - (x_0^2 - 4x_0) = (2x_0 - 4)(x - x_0)$, 即 $y = (2x_0 - 4)x - x_0^2$, 所以 $x_B = \frac{x_0^2}{2(x_0 - 2)} > 0, y_C = -x_0^2 < 0$, 所以 $x_0 \in (2, 4)$, 所以 $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_0^2}{2(x_0 - 2)} \cdot x_0^2 = \frac{x_0^4}{4(x_0 - 2)}, S_{\triangle BOC}' = \frac{x_0^3(3x_0 - 8)}{4(x_0 - 2)^2}$, 令 $S_{\triangle BOC}' = 0$, 得 $x_0 = \frac{8}{3}$. 当 $x_0 \in (2, \frac{8}{3})$ 时, $S_{\triangle BOC}' < 0$; 当 $x_0 \in (\frac{8}{3}, 4)$ 时, $S_{\triangle BOC}' > 0$. 所以当 $x_0 = \frac{8}{3}$ 时, $S_{\triangle BOC}$ 取得最小值, 此时 $x_B = \frac{x_0^2}{2(x_0 - 2)} = \frac{16}{3}$, 所以 $\frac{CP}{PB} = \frac{x_0}{\frac{16}{3} - x_0} = 1$. 故选 D.

二、多选题

9. AB 【解析】对于 A, 因为 $z = \frac{1+3i}{1-3i}$, 所以 $z = \frac{(1+3i)^2}{10} = \frac{-8+6i}{10} = \frac{-4+3i}{5}$, 所以以 A 成立; 对于 B, 因为 z 为纯虚数, 所以 $z = bi$ ($b \in \mathbf{R}, b \neq 0$), 所以 $z^2 = -b^2 < 0$, 所以 B 成立; 对于 C, 若 $z = 3+i$, 则满足 $z - (2+i) = 1 > 0$, 但 $z = 3+i > 2+i$ 不成立, 所以 C 不成立; 对于 D, 因为 $|z+3i| \leq 3$, 所以动点 z 在以 $(0, -3)$ 为圆心, 半径为 3 的圆周或圆内, 所以集合 M 所构成区域的面积

为 $\pi \times 3^2 = 9\pi$, 所以 D 不成立. 故选 AB.

10. BCD 【解析】根据题意, 设直线 l 的方程为 $x = my + \frac{1}{2}$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 联立直线 l 与抛物线的方程 $\begin{cases} x = my + \frac{1}{2} \\ y^2 = 2x \end{cases}$, 消去 x 得 $y^2 - 2my - 1 = 0, \Delta = 4m^2 + 4 > 0, m \in \mathbf{R}$. 由一元二次方程根与系数的关系可得 $y_1 + y_2 = 2m, y_1 y_2 = -1$. $|AB| = \sqrt{1+m^2} \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = 2(1+m^2) = 3$, 解得 $m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 l 的斜率的绝对值为 $\sqrt{2}$, 故 A 错误; $\because |AF| > |BF|, \therefore |AF| - |BF| = x_1 + \frac{1}{2} - (x_2 + \frac{1}{2}) = x_1 - x_2 = m(y_1 - y_2) = |2m \sqrt{1+m^2}| = \sqrt{3}$, 故 B 正确; $\because |AF| - |BF| = \sqrt{3}, |AF| + |BF| = 3, \therefore |AF| = \frac{3+\sqrt{3}}{2}, |BF| = \frac{3-\sqrt{3}}{2}, \therefore |AF| \cdot |BF| = \frac{3}{2}$, 故 C、D 正确. 故选 BCD.

11. ABC 【解析】因为 $|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{3}$, 所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{PQ} = |\overrightarrow{AE}| |\overrightarrow{PQ}| \cos \alpha = \sqrt{3} |\overrightarrow{PQ}| \cos \alpha$. 当 P 点在 A 点处, 因为点 Q 在由点 B 向点 C 变化时, $|\overrightarrow{AQ}|$ 由 1 增大到 $\sqrt{3}$, \overrightarrow{AE} 与 \overrightarrow{AQ} 的夹角 α 由 $\frac{\pi}{2}$ 缩小到 $\frac{\pi}{3}$, $\cos \alpha$ 由 0 增大到 $\frac{1}{2}$, 所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ} = |\overrightarrow{AE}| |\overrightarrow{AQ}| \cos \alpha = \sqrt{3} |\overrightarrow{AQ}| \cos \alpha$ 单调递增. 当 Q 点在 B 点处, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ} = \sqrt{3} |\overrightarrow{AQ}| \cos \alpha = 0$; 当 Q 点在 C 点处, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ} = \sqrt{3} |\overrightarrow{AQ}| \cos \alpha = \frac{3}{2}$, 此时 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{PQ}$ 的取值范围是 $[0, \frac{3}{2}]$. 同理, 当 P 点在 F 点处, 因为点 Q 在由点

参考答案及解析

数学

B 向点 C 变化时, $|\vec{FQ}|$ 由 $\sqrt{3}$ 增大到 2, \vec{AE} 与 \vec{FQ} 的夹角 α 由 $\frac{2\pi}{3}$ 缩小到 $\frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha$ 由 $-\frac{1}{2}$ 增大到 0, 所以 $\vec{AE} \cdot \vec{FQ} = |\vec{AE}| |\vec{FQ}| \cos \alpha = \sqrt{3} |\vec{FQ}| \cos \alpha$ 单调递增. 当 Q 点在 B 点处, $\vec{AE} \cdot \vec{FQ} = \sqrt{3} |\vec{FQ}| \cos \alpha = -\frac{3}{2}$; 当 Q 点在 C 点处, $\vec{AE} \cdot \vec{FQ} = \sqrt{3} |\vec{FQ}| \cos \alpha = 0$, 此时 $\vec{AE} \cdot \vec{PQ}$ 的取值范围是 $[-\frac{3}{2}, 0]$, 所以 $\vec{AE} \cdot \vec{PQ}$ 的取值范围是 $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. 故选 ABC.

12. AC 【解析】对于 A, 因为 $2b > a + c$, 所以 $b^2 > (\frac{a+c}{2})^2 > ac$, 所以 $b^2 > ac$, 所以 A 成立; 对于 B, 举例: $a^2 = b^2 + c^2$, 取 $a=5, b=4, c=3$, 满足 $b^2 > ac$, 但 $2b = a + c$, 所以 B 不成立; 对于 C, 因为 $\tan \angle BFO > 1$, 所以 $\frac{b}{c} > 1$, 即 $b > c$, 所以 $\sqrt{a^2 - c^2} > c$, 所以 $e < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又 $e > 0$, 所以 C 成立, D 不正确. 故选 AC.

三、填空题

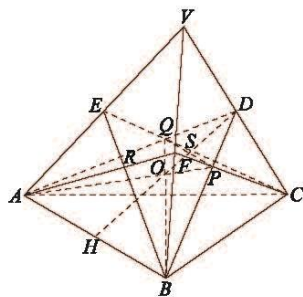
13.1 【解析】因为 $P(X \leq 0) = P(X \geq 2)$, 所以 $\mu = \frac{0+2}{2} = 1$. 故答案为 1.

14.8 【解析】直线 $l: kx - y + 2 = 0$ 经过点 $P(0, 2)$, 圆 C: $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ 化为标准方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 16$, 所以 $P(0, 2)$ 在圆 C 的内部, $\triangle QRC$ 的面积为 $\frac{1}{2} |QC| \cdot |RC| \sin \angle QCR = 8 \sin \angle QCR \leq 8$, 当且仅当 $\angle QCR = \frac{\pi}{2}$, 等号成立, 因为 $|PC| = 2\sqrt{2}$, 所以 $l \perp CP$ 时取等号. 故答案为 8.

15. $1000(\sqrt{3}-1)a$ 【解析】由题意可知 $AC = AE \tan \alpha$, $BD = BF \tan \beta$, 所以 $BD - AC = BF \tan \beta - AE \tan \alpha =$

$a \left(\frac{\sin \beta}{\cos \beta} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = a \left(\frac{\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} \right) = \frac{a \sin(\beta - \alpha)}{\cos \alpha \cos \beta}$, 所以可以估计 A, B 两地的距离大约为 $(BD - AC) \times 1000 = \frac{1000a \sin(\beta - \alpha)}{\cos \alpha \cos \beta}$ 里, 因为 $\sin(\beta - \alpha) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\cos \alpha \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 所以可以估计 A, B 两地的距离大约为 $\frac{1000a \sin(\beta - \alpha)}{\cos \alpha \cos \beta} = 1000(\sqrt{3} - 1)a$ 里. 故答案为 $1000(\sqrt{3} - 1)a$.

16.3 【解析】如图所示,



平面 ABD 与平面 BCE 交于 BQ, 平面 ABD 与平面 ACF 交于 AP, 所以 O 为 AP 与 BQ 的交点. 因为 D, E, F 分别为 VC, VA, VB 的中点, 所以 P, Q 分别为三角形 VBC, VAC 的重心, 所以 $\frac{DP}{PB} = \frac{DQ}{AQ} = \frac{1}{2}$, 连接 DO 并延长交 AB 于 H, 连接 PQ, 设 PQ 与 DO 交于 S, 则 $PQ \parallel AB$, $\frac{PQ}{AB} = \frac{DP}{DB} = \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{SO}{OH} = \frac{PO}{OA} = \frac{PQ}{AB} = \frac{1}{3}$, $\frac{DS}{DH} = \frac{DP}{DB} = \frac{1}{3}$, 所以 $DO = OH$, 设三棱锥 V-ABC 的高为 h_0 , 三棱锥 O-ABC 的高为 h , 则 $\frac{h}{h_0} = \frac{1}{4}$, 即 $h = \frac{h_0}{4}$, 因为三棱锥 V-ABC 的体积为 4, 所以三棱锥 O-ABC 的体积为 1, 所以 M 的值为 $4 - 1 = 3$. 故答案为 3.

四、解答题

17. 证明: (1) 因为 $8S_n = (a_n + 2)^2$, 所以 $8S_{n+1} = (a_{n+1} + 2)^2$,

$$\text{相减得, } 8S_{n+1} - 8S_n = (a_{n+1} + 2)^2 - (a_n + 2)^2, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } 8a_{n+1} = a_{n+1}^2 - a_n^2 + 4(a_{n+1} - a_n),$$

$$\text{所以 } a_{n+1}^2 - a_n^2 - 4(a_{n+1} + a_n) = 0,$$

$$\text{所以 } (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 4) = 0,$$

$$\text{因为 } a_{n+1} + a_n > 0, \text{ 所以 } \forall n \in \mathbf{N}^*, a_{n+1} - a_n = 4. \quad (4 \text{ 分})$$

又 $n=1$ 时, $8S_1 = 8a_1 = (a_1 + 2)^2 = a_1^2 + 4a_1 + 4$, 得 $a_1 = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 4 为公差的等差数列. (6 分)

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + 4(n-1) = 4n - 2, \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } a_n = \log_{\sqrt{3}} b_n, \text{ 所以 } b_n = (\sqrt{3})^{a_n} = 3^{2n-1}, \quad (8 \text{ 分})$$

即数列 $\{b_n\}$ 是以 3 为首项, 9 为公比的等比数列,

$$\text{所以 } T_n = \frac{3(1-9^n)}{1-9} = \frac{3(9^n-1)}{8}. \quad (10 \text{ 分})$$

18. 解: (1) 一次抽取两个号码, 全是私家游团队的概率

$$\text{为 } \frac{C_2^3}{C_2^9} = \frac{1}{12}; \quad (2 \text{ 分})$$

(2) 设 A 表示每次抽取一个号码, 恰好抽得私家游团队,

$$\text{且 } P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad (4 \text{ 分})$$

由题意知, 随机变量 ξ 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$4, \text{ 且 } \xi \sim B\left(4, \frac{1}{3}\right), \quad (7 \text{ 分})$$

$$P(\xi=i) = C_4^i \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{4-i}, i=0, 1, \dots, 4, \quad (9 \text{ 分})$$

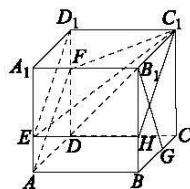
故 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

(11 分)

$$\text{数学期望 } E(\xi) = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}. \quad (12 \text{ 分})$$

19. 解: (1) 在 BB_1 上取 H 点, 使得 $BH = 1$, 连接 EH, HC_1 .



在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 因为 $AE=1$, 所以 $EH \parallel C_1D_1$, 所以 E, H, C_1, D_1 四点共面, (2 分)

在矩形 BB_1C_1C 中, 因为 $BB_1 = BC = 3, B_1H = BG = 2$,

所以 $\text{Rt}\triangle HB_1C_1$ 与 $\text{Rt}\triangle GBB_1$ 全等, 所以 $\angle BB_1G = \angle B_1C_1H$,

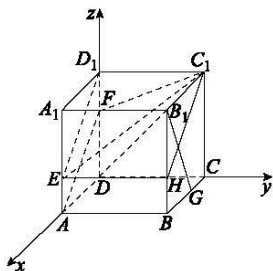
$$\text{所以 } B_1G \perp C_1H, \quad (4 \text{ 分})$$

因为 $C_1D_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C , 所以 $EH \perp$ 平面 BB_1C_1C , 所以 $EH \perp B_1G$,

又因为 $EH \cap HC_1 = H$, 所以 $B_1G \perp$ 平面 EHC_1D_1 ,

$$\text{即 } B_1G \perp \text{平面 } C_1D_1E. \quad (6 \text{ 分})$$

(2) 因为 DA, DC, DD_1 两两垂直, 所以以 D 为坐标原点, 射线 DA, DC, DD_1 分别为 x, y, z 轴建立空间坐标系.



所以 $B_1(3, 3, 3), G(1, 3, 0)$, 由(1)得, 平面 C_1D_1E

的法向量为 $\vec{B_1G} = (-2, 0, -3)$, (8分)

又 $A(3, 0, 0), F(0, 0, 2), C_1(0, 3, 3)$, 所以 $\vec{AF} = (-3, 0, 2), \vec{AC_1} = (-3, 3, 3)$,

设 AC_1F 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,
$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{AF} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \vec{AC_1} = 0 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} -3x + 2z = 0 \\ -3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$, 取 $\mathbf{n} = (2, -1, 3)$,

(10分)

$$|\cos \theta| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \vec{B_1G}|}{|\mathbf{n}| |\vec{B_1G}|} = \frac{|-4 - 9|}{\sqrt{13} \times \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{182}}{14}.$$

所以平面 C_1D_1E 与平面 AC_1F 所成的锐二面角的

余弦值为 $\frac{\sqrt{182}}{14}$. (12分)

20. 解: (1) 若 $\theta \in ((2n+1)\pi, 2(n+1)\pi)$,

$$\text{则 } \frac{\pi t}{30} \in ((2n+1)\pi, 2(n+1)\pi), \quad (2 \text{分})$$

$$\text{所以 } t \in (60n+30, 60n+60)s, (n \in \mathbf{N}), \quad (3 \text{分})$$

$$\angle AOB = 2\pi - \left[\frac{\pi}{30} \cdot (t - 60n) \right] = 2(n+1)\pi -$$

$$\frac{\pi t}{30} (n \in \mathbf{N}),$$

$$\text{弦 } AB \text{ 的长度为 } 2 \times 5 \sin \frac{\angle AOB}{2} = 10 \sin \left[(n+1)\pi -$$

$$\frac{\pi t}{60} \right] (n \in \mathbf{N}) \text{ (m)}; \quad (5 \text{分})$$

(2) 当 $t = 110 \in (60n+30, 60n+60)$ s 时, 得 $n = 1$,

$$\text{所以 } AB = 10 \sin \left(2\pi - \frac{110\pi}{60} \right) = 10 \sin \frac{\pi}{6} = 5 \text{ m},$$

(7分)

在三角形 ABC 中,

$$\text{由余弦定理得, } \cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} =$$

$$\frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8} = \frac{1}{2},$$

因为 $0 < \angle ABC < \pi$, 所以 $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, (9分)

$$\text{又 } \angle OBC = \angle ABC + \angle OBA = \frac{2\pi}{3}, \quad (10 \text{分})$$

在三角形 OBC 中, 由余弦定理得,

$$OC = \sqrt{OB^2 + BC^2 - 2OB \cdot BC \cdot \cos \angle OBC} =$$

$$\sqrt{5^2 + 8^2 + 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{129},$$

所以 OC 的长为 $\sqrt{129}$ m. (12分)

21. 解: (1) 因为 $f(x) = \cos x - \frac{1}{e^x}$,

$$\text{所以 } f'(x) = -\sin x + \frac{1}{e^x},$$

因为 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right)$ 时, $-\sin x, \frac{1}{e^x}$ 均单调递减,

所以 $f'(x) = -\sin x + \frac{1}{e^x}$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right)$ 上单调

递减, (2分)

$$\text{因为 } e^2 < 8, \text{ 所以 } f' \left(\frac{\pi}{6} \right) = e^{-\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{2} > e^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} - \frac{1}{2} > 0,$$

$$\text{因为 } e^3 > 16, \text{ 所以 } f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = e^{-\frac{\pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{2} < e^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e^3}} - \frac{1}{2} < 0,$$

根据零点存在定理可得, $f'(x)$ 存在唯一零点 $x_0 \in$

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right). \quad (4 \text{分})$$

$$(2) f'(x) = -\sin x + \frac{1}{e^x}, x \in [0, 2\pi],$$

当 $x \in [\pi, 2\pi]$ 时, $f'(x) = \frac{1}{e^x} - \sin x > 0$ 恒成立,

所以 $f(x)$ 在 $x \in [\pi, 2\pi]$ 上单调递增. (6分)

当 $x \in [0, \pi)$ 时, 令 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = -\frac{1}{e^x}$

$-\cos x$ 单调递增,

$$g'(0) = -1 - \cos 0 = -2 < 0,$$

$$g'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -e^{-\frac{3\pi}{4}} - \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{-\frac{3\pi}{4}} > 0,$$

根据零点存在定理可知, 存在唯一的 $x_1 \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$,

$$\text{使得 } g'(x_1) = -e^{-x_1} - \cos x_1 = 0, \quad (8分)$$

$\therefore f'(x) = e^{-x} - \sin x$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减, 在

(x_1, π) 上单调递增,

$$f'(x_1) = e^{-x_1} - \sin x_1 = -\cos x_1 - \sin x_1$$

$$= -\sqrt{2} \sin\left(x_1 + \frac{\pi}{4}\right) < 0,$$

$$f'(0) = 1 > 0, f'(\pi) = e^{-\pi} > 0,$$

根据零点存在定理可知, 存在 $x_2 \in (0, x_1)$, $x_3 \in (x_1, \pi)$, 使得 $f'(x_2) = 0, f'(x_3) = 0$, (10分)

所以当 $x \in [0, x_2)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增; 当

$x \in (x_2, x_3)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减; 当 $x \in$

$(x_3, \pi]$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增, (11分)

又 $f(x)$ 在 $x \in [\pi, 2\pi]$ 上单调递增, 且图象不间断,

所以 $f(x)$ 在 $[0, x_2)$ 、 $(x_3, 2\pi]$ 上分别单调递增, 在

(x_2, x_3) 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上存在

两个不同的单调递增区间, 一个单调递减区间.

(12分)

22. 解: (1) 因为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离

心率为 $\frac{5}{3}$,

$$\text{所以 } \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{5}{3}, \quad (1分)$$

双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 即 $bx \pm ay$

$= 0$,

因为点 $(a, 0)$ 到渐近线的距离为 $\frac{12}{5}$, 所以 $\frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$= \frac{12}{5}, \quad (2分)$$

联立以上关于 a, b 的方程得, $a^2 = 9, b^2 = 16$,

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. (3分)

(2) ①若直线 l 的斜率不存在, 设直线 l 的方程为

$x = t$, 则 $M(t, y_1), N(t, -y_1)$,

所以 $\frac{t^2}{9} - \frac{y_1^2}{16} = 1$, 所以 $y_1^2 = \frac{16t^2}{9} - 16 > 0$, 得 $t > 3$ 或

$t < -3$. (4分)

易知点 $A(3, 0)$, $\overrightarrow{AM} = (t-3, y_1)$, \overrightarrow{AN}

$= (t-3, -y_1)$,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (t-3)^2 - y_1^2 = (t-3)^2 + 16 - \frac{16}{9}t^2 =$$

$$-\frac{7}{9}t^2 - 6t + 25 = 0, \quad (5分)$$

解得 $t = -\frac{75}{7}$ ($t = 3$ 舍去), 所以直线 l 过定点

$$\left(-\frac{75}{7}, 0\right). \quad (6分)$$

②若直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = kx +$

$m, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m \\ 16x^2 - 9y^2 = 144 \end{cases}, \text{ 可得 } (16 - 9k^2)x^2 - 18kmx$$

参考答案及解析

数学

$$-(9m^2+144)=0,$$

所以

$$\begin{cases} \Delta=18 \times 18k^2m^2+4(16-9k^2)(9m^2+144)>0 \\ 16-9k^2 \neq 0 \end{cases},$$

得 $9k^2 < 16+m^2$, 且 $9k^2 \neq 16$.

由韦达定理可得 $x_1+x_2 = \frac{18km}{16-9k^2}$, $x_1x_2 =$

$$-\frac{9m^2+144}{16-9k^2}, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\overrightarrow{AM} = (x_1-3, kx_1+m), \overrightarrow{AN} = (x_2-3, kx_2+m),$$

则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$

$$= (x_1-3)(x_2-3) + (kx_1+m)(kx_2+m)$$

$$= (k^2+1)x_1x_2 + (km-3)(x_1+x_2) + m^2+9$$

$$= \frac{-(9m^2+144)(k^2+1)+18km(km-3)}{16-9k^2} + m^2 +$$

$$9=0,$$

化简可得 $7m^2-54km-225k^2=0$,

$$\text{即 } (7m-75k)(m+3k)=0, \quad (10 \text{ 分})$$

得 $m=-3k$ 或 $m=\frac{75}{7}k$.

若 $m=-3k$, 则直线 l 的方程为 $y=k(x-3)$, 此时直线 l 过点 A , 即直线 l 与双曲线 C 有 3 个交点, 不成立;

若 $m=\frac{75}{7}k$, 则直线 l 的方程为 $y=k(x+\frac{75}{7})$, 此时直线 l 过定点 $(-\frac{75}{7}, 0)$.

综上所述, 直线 l 过定点 $(-\frac{75}{7}, 0)$. (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

