郴州九校联盟 2023 届适应性测试

数学参考答案

一、选择题

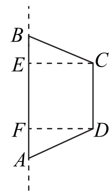
1. A 【解析】$\because z(1+\mathrm{i})=1+2\mathrm{i}$，$\therefore z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(1+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{3+\mathrm{i}}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，所以其对应的点$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$在第一象限．故选 A.

2. A 【解析】$\because A=\{(x,y)\mid y=|x|\}$，$B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\right\}$，$\therefore A\cap B=\left\{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right),\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$，$\therefore$集合 $A\cap B$ 的真子集的个数为$2^2-1=3$．故选 A.

3. A 【解析】由题意可知 e 是方程 $3x^2-11x+10=0$ 的根，则 $e=2$ 或$\dfrac{5}{3}$，$\because b>\sqrt{2}a>0$，$\therefore e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=1+\dfrac{b^2}{a^2}>3$，即 $e>\sqrt{3}$，$\dfrac{5}{3}<\sqrt{3}$，$\therefore e=\dfrac{5}{3}$应舍去，$\therefore e=2$．故选 A.

4. B 【解析】$\because(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，$\therefore \boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=0$，$\therefore|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，又 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，$\therefore \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，$\therefore \boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}^2$，$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{a}^2}=\dfrac{1}{2}$，又 $0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$，$\therefore\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{3}$．故选 B.

5. C 【解析】分别过点 C，点 D 作 $CE\perp AB$ 于点 E，$DF\perp AB$ 于点 F，$\because AB=2CD=2BC=2AD=4$，$\therefore BE=AF=1$，$EF=2$，$CE=DF=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$，等腰梯形 $ABCD$ 绕底边 AB 旋转一周所得的几何体的体积 $V=2\times\dfrac{1}{3}\pi\cdot CE^2\cdot BE+\pi\cdot CE^2\cdot EF=8\pi$；等腰梯形 $ABCD$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}(CD+AB)\cdot CE=3\sqrt{3}$，记重心 G 到 AB 的距离为 h'，则重心绕旋转轴旋转一周的周长为 $l=2\pi h'$，根据题意可知 $8\pi=3\sqrt{3}\times2\pi h'$，则 $h'=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$．故选 C.



6. C 【解析】由题意可知 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，$\therefore$直线 l 的方程为 $y=2\sqrt{2}\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$，由$\begin{cases}y^2=2px\\ y=2\sqrt{2}\left(x-\dfrac{p}{2}\right)\end{cases}$可得 $4x^2-5px+p^2=0$，解得 $x=p$ 或 $x=\dfrac{p}{4}$，$\therefore\lambda=\dfrac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{BF}|}=\dfrac{p+\frac{p}{2}}{\frac{p}{4}+\frac{p}{2}}=2$，或者 $\lambda=\dfrac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{BF}|}=\dfrac{\frac{p}{4}+\frac{p}{2}}{p+\frac{p}{2}}=\dfrac{1}{2}$．故选 C.

7. B 【解析】$\because\ln 2.1<\ln\mathrm{e}=1<1.1$，$\therefore a<c$，$\ln 2.1<1<\mathrm{e}^{0.1}$，$\therefore a<b$，令 $g(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，$0<x<1$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$，所以当 $0<x<1$ 时，函数 $g(x)=\mathrm{e}^x-x-1$ 单调递增，$\therefore g(0.1)>g(0)=0$，即 $\mathrm{e}^{0.1}-1-0.1>0$，即 $\mathrm{e}^{0.1}>1.1$，$\therefore b>c$，从而可知 $a<c<b$．故选 B.

8. D 【解析】设该直线与 $f(x)$ 相切于点$(x_1,x_1^3-x_1)$，因为 $f'(x)=3x^2-1$，所以$f'(x_1)=3x_1^2-1$，所以该切线方程为 $y-(x_1^3-x_1)=(3x_1^2-1)(x-x_1)$，即 $y=(3x_1^2-1)x-2x_1^3$．设该直

线与 $g(x)$ 相切于点 $(x_2,x_2^2-a^2+a)$，因为 $g'(x)=2x$，所以 $g'(x_2)=2x_2$，所以该切线方程为 $y-(x_2^2-a^2+a)=2x_2(x-x_2)$，即 $y=2x_2x-x_2^2-a^2+a$，所以 $\begin{cases}3x_1^2-1=2x_2\\-2x_1^3=-x_2^2-a^2+a\end{cases}$，所以 $-a^2+a=x_2^2-2x_1^3=\left(\frac{3x_1^2-1}{2}\right)^2-2x_1^3=\frac{9}{4}x_1^4-2x_1^3-\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{4}$，令 $h(x)=\frac{9}{4}x^4-2x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}$，$\therefore h'(x)=9x^3-6x^2-3x=3x(3x+1)(x-1)$；$\therefore$ 当 $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(0,1)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in\left(-\frac{1}{3},0\right)\cup(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$；$\therefore h(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$，$(0,1)$ 上单调递减；在 $\left(-\frac{1}{3},0\right)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增；又 $h\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{27}$，$h(1)=-1$，所以 $h(x)\in[-1,+\infty)$，所以 $-a^2+a\geqslant-1$，解得 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，所以 a 的取值范围为 $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. 故选 D.

二、选择题

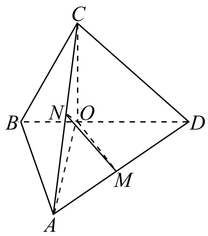
9. BC 【解析】学生问卷成绩在 $[90,110)$ 内的频率为 $1-(0.0025+0.0075+0.0075+0.0125+0.0050)\times20=0.3$，故 A 错误；由图可得，学生问卷成绩的众数为 $\frac{90+110}{2}=100$，故 B 正确；学生问卷成绩的样本数据的第 75 百分位数为 $110+\frac{0.1}{0.0125}=118$，故 C 正确；样本中 110 分以上的学生的频率为 $0.25+0.1=0.35$，则全体高三学生问卷成绩 110 分以上学生为 $2000\times0.35=700$ 名，故 D 错误. 故选 BC.

10. BCD 【解析】$f(x)=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin 13x}{13}$. 对于 A，$\because f(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{1}+\frac{\sin 3(x+\pi)}{3}+\frac{\sin 5(x+\pi)}{5}+\cdots+\frac{\sin 13(x+\pi)}{13}=-f(x)$，$\therefore\pi$ 不是 $f(x)$ 的周期，故 A 错误；对于 B，$\because f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{1}+\frac{\sin(-3x)}{3}+\frac{\sin(-5x)}{5}+\cdots+\frac{\sin(-13x)}{13}=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 为奇函数，故 B 正确；对于 C，$\because f(x+\pi)=-f(x)$，且 $f(x)$ 为奇函数，$\therefore f(x+\pi)=f(-x)$，$\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，故 C 正确；对于 D，$\because f'(x)=\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos 13x$，当 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\cos nx=1(n=1,3,5,\cdots,13)$，$\therefore f'(x)$ 取最大值 7，故 D 正确. 故选 BCD.

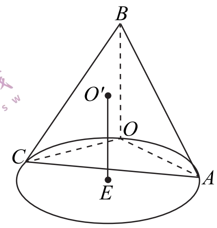
11. ACD 【解析】由题意可知直线 l 过定点 $M(3,4)$，圆 O 的圆心为坐标原点 O，半径为 2，设圆心 O 到直线 l 的距离为 d，当 $OM\perp l$ 时，$d=|OM|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，当 OM 与直线 l 不垂直时，$d<|OM|$，从而可知点 Q 到直线 l 的最大距离为 $5+2=7$，故 A 正确；若直线 l 被圆 O 所截得的弦长最大，则直线经过圆心，则 $m\cdot0-0-3m+4=0$，解得 $m=\frac{4}{3}$，故 B 错误；若直线 l 与圆 O 相切，则 $\frac{|-3m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$，解得 $m=\frac{12\pm2\sqrt{21}}{5}$，故 C 正确；若直线 l 被圆 O 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，则圆心 O 到直线 l 的距离为 $\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，$\frac{|-3m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$，解得 $m=\frac{6\pm\sqrt{6}}{4}$，故 D 正确. 故选 ACD.

12. AB 【解析】连接 AO,CO，则 $AO\perp BD,CO\perp BD$，对于 A：$AO\cap CO=O$，$\therefore BD\perp$ 平面 AOC，$\therefore BD\perp$

AC,故 A 正确;对于 B:由题目条件可知,$AO\perp BD$,$CO\perp BD$,∴$\angle AOC$ 为二面角 $A-BD-C$ 的平面角,∵平面 $BCD\perp$ 平面 ABD,$CO\perp BD$,∴$CO\perp AO$,取 AD 的中点 M,AC 的中点 N,连接 OM,ON,MN,则 $OM/\!/AB$,



且 $OM=\frac{1}{2}AB=1$,$MN/\!/CD$,$MN=\frac{1}{2}CD=1$,∴$\angle NMO$(或其补角)为异面直线 AB 与 CD 所成的角,∵$\angle BCD=\frac{\pi}{3}$,∴$OA=OC=\sqrt{3}$,∴$ON=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{6}}{2}$,在 $\triangle MON$ 中,$MO=MN=1$,$ON=\frac{\sqrt{6}}{2}$,$\cos\angle NMO=\frac{1+1-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}{2\times1\times1}=\frac{1}{4}$,异面直线 AB 与 CD 所成角的余弦值为 $\frac{1}{4}$,故 B 正确;对于 C:由上面的推导可知$\angle AOC$ 为二面角 $A-BD-C$ 的平面角,∴$\angle AOC=\frac{2\pi}{3}$,由(2)可知,当$\angle BCD=\frac{\pi}{3}$时,$OA=OC=\sqrt{3}$,$BD=2$,又 $BD\perp$ 平面 AOC,∴三棱锥 $C-ABD$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times BD\times S_{\triangle AOC}=\frac{1}{3}\times2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故 C 错误;对于 D:由上面的推导可知$\angle AOC$ 为二面角 $A-BD-C$ 的平面角,所以$\angle AOC=\frac{2\pi}{3}$,且 $BO\perp$ 平面 AOC,∵$\angle BCD=\frac{\pi}{2}$,∴$OA=OC=OB=OD=\sqrt{2}$,∴$AC=\sqrt{6}$,∴$\triangle AOC$外接圆的半径为$\frac{1}{2}\cdot\frac{AC}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{2}$.设 E 为$\triangle AOC$ 外接圆的圆心,则 $EA=EC=EO=\sqrt{2}$,所以三棱锥$C-AOB$ 的外接球的球心 O' 在过点 E 且与 OB 平行的直线上,设 $O'E=h$,则由 $O'B=O'C$ 得 $h^2+2=(\sqrt{2}-h)^2+2$,得 $h=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $O'B=\sqrt{h^2+2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$,所以外接球的体积为$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^3=\frac{5\sqrt{10}\pi}{3}$,故 D 错误.故选 AB.



三、填空题

13. $\frac{1}{8}$ 【解析】∵$x>0$,$y>0$,且 $2x+y=1$,∴$x^2+\frac{1}{4}y^2=\frac{1}{4}(4x^2+y^2)=\frac{1}{4}[(2x)^2+y^2]\geqslant\frac{1}{4}\left[2\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{8}$,当且仅当 $2x=y=\frac{1}{2}$时等号成立.故答案为$\frac{1}{8}$.

14. 19.5,67 【解析】由上表可知:$\bar{x}=\frac{2+3+4+6+7+8}{6}=5$,∵$(\bar{x},\bar{y})$在函数 $y=x^2$ 的图象上,∴$\bar{y}=5^2=25$,∴$\bar{y}=\frac{7.5+11.5+m+31.5+36.5+43.5}{6}=25$,解得 $m=19.5$,又$(\bar{x},\bar{y})$满足线性回归方程$\hat{y}=6x+\hat{a}$,则$\hat{a}=25-6\times5=-5$,∴$\hat{y}=6x-5$,当 $x=12$ 时,∴$y=6\times12-5=67$(万元).故答案为 19.5,67.(第一空 2 分 第二空 3 分)

15. 80 【解析】令 $x+1=t$,则$(t-2)^6=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_6t^6$,∴$a_2=C_6^4(-2)^4=240$,$a_3=C_6^3(-2)^3=-160$,∴$a_2+a_3=240-160=80$.故答案为 80.

16. $\left\{x \middle| x<-\frac{5}{2}\right\}$ 【解析】∵函数 $f(x)-1$ 为奇函数,∴函数 $f(x)$ 关于 $(0,1)$ 中心对称,又 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,∴$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增,从而 $f(3x+4)+f(1-x)<2$ 可化为 $f(3x+4)<2-f(1-x)=f(x-1)$,∴$3x+4<x-1$,∴$2x<-5$,∴$x<-\frac{5}{2}$,∴原不等式的解集为 $\left\{x \middle| x<-\frac{5}{2}\right\}$.故答案为 $\left\{x \middle| x<-\frac{5}{2}\right\}$.

四、解答题

17. **解**:(1)∵$\frac{\sin A-\sin B+\sin C}{\sin C}=\frac{b}{a+b-c}$,由正弦定理可得 $\frac{a-b+c}{c}=\frac{b}{a+b-c}$,

∴$bc=b^2+c^2-a^2$,∴$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$,

又 $0<A<\pi$,∴$A=\frac{\pi}{3}$.　　(6 分)

(2)$\frac{a}{\sin A}=2R$,$a=2R\sin A=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,

由余弦定理得 $3=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc\geqslant\frac{1}{4}(b+c)^2$,即 $b+c\leqslant 2\sqrt{3}$,当且仅当 $b=c=\sqrt{3}$ 时等号成立,∴$\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c\leqslant 3\sqrt{3}$,当且仅当 $b=c=\sqrt{3}$ 时取等号,即 $\triangle ABC$ 的周长的最大值 $3\sqrt{3}$.　　(10 分)

18. **解**:(1)∵$(2n+3)S_{n+1}=(n+2)S_n+(n+1)S_{n+2}$,

∴$(n+1)(S_{n+2}-S_{n+1})=(n+2)(S_{n+1}-S_n)$,

即 $(n+1)a_{n+2}=(n+2)a_{n+1}$,∴$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{n+2}{n+1}$,

∴当 $n\geqslant 3$ 时,$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n-1}$,又 $\frac{a_2}{a_1}=2$ 适合上式,所以当 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n-1}$,　　(3 分)

所以当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{2}\times 2\times 1=n$,

当 $n=1$ 时,$a_1=1$,符合上式,∴$a_n=n$.　　(6 分)

(2)∵$a_n=n$,∴$\log_2\frac{a_{n+1}}{a_n}=\log_2(n+1)-\log_2 n$,

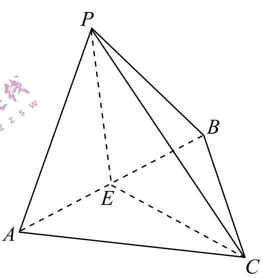
∴$T_n=(\log_2 2-\log_2 1)+(\log_2 3-\log_2 2)+\cdots+(\log_2(n+1)-\log_2 n)=\log_2(n+1)$,　　(8 分)

则 $c_n=[T_n]=[\log_2(n+1)]$,∴$M_{100}=[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 101]$,

∵$[\log_2 2]=[\log_2 3]=1$,$[\log_2 4]=[\log_2 5]=[\log_2 6]=[\log_2 7]=2$,…,$[\log_2 64]=\cdots=[\log_2 101]=6$,　　(10 分)

∴$M_{100}=2\times 1+2^2\times 2+\cdots+2^5\times 5+38\times 6=486$.　　(12 分)

19. **解**:(1)如图,取 AB 的中点 E,连接 PE,CE,

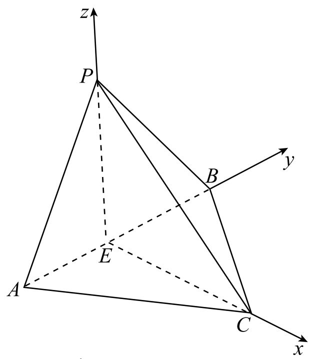


∵$\triangle PAB$ 为正三角形,∴$PE\perp AB$,∵$CA=CB$,∴$CE\perp AB$,又 $CE\cap PE=E$,$CE\subset$ 平面 PCE,$PE\subset$ 平面 PCE,∴$AB\perp$ 平面 PCE,　　(3 分)

又 $PC\subset$ 平面 PCE,∴$AB\perp PC$.　　(5 分)

(2)∵$AB=2$,$\triangle PAB$ 为正三角形,∴$PE=\sqrt{3}$,又 $CA=CB=\sqrt{5}$,∴$CE=2$,又 $PC=\sqrt{7}$,∴$CE^2+PE^2=CP^2$,

∴$PE\perp CE$,又 $PE\perp AB$,∴PE,CE,AB 两两互相垂直,如图,以点 E 为坐标原点,EC,EB,EP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立如图所示空间直角坐标系 $E-xyz$,　　(7 分)



则 $E(0,0,0)$，$A(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$C(2,0,0)$，

平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，又 $\overrightarrow{AP}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(2,1,0)$，设平面 APC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}y+\sqrt{3}z=0\\ 2x+y=0\end{cases}$，令 $y=-2\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-2\sqrt{3},2)$，设二面角 $P-AC-B$ 的大小为 θ，

则 $|\cos\langle\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{19}}$，　　(10 分)

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{\sqrt{19}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{285}}{19}$.

(11 分)

$\therefore$ 二面角 $P-AC-B$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{285}}{19}$.　　(12 分)

20. **解**：(1)列联表补充如下：

	甲组	乙组	合计
男生	36	64	100
女生	60	40	100
合计	96	104	200

(2 分)

零假设为

H_0：学生选择排球还是篮球与性别无关.

根据列联表中的数据，经计算得到

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$=\frac{200\times(36\times40-60\times64)^2}{96\times104\times100\times100}=\frac{150}{13}\approx11.538>10.828=x_{0.001}，$$

依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为学生喜欢排球还是篮球与“性别”有关.

(6 分)

(2)按分层抽样，甲组中男生 9 人，乙组中男生 16 人，则 X 的可能取值为 0，1，2，3，

$P(X=0)=\dfrac{C_{16}^3}{C_{25}^3}=\dfrac{28}{115}$，$P(X=1)=\dfrac{C_9^1C_{16}^2}{C_{25}^3}=\dfrac{54}{115}$，$P(X=2)=\dfrac{C_9^2C_{16}^1}{C_{25}^3}=\dfrac{144}{575}$，$P(X=3)=\dfrac{C_9^3}{C_{25}^3}=\dfrac{21}{575}$，

(10 分)

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{28}{115}$	$\dfrac{54}{115}$	$\dfrac{144}{575}$	$\dfrac{21}{575}$

数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{28}{115}+1\times\dfrac{54}{115}+2\times\dfrac{144}{575}+3\times\dfrac{21}{575}=\dfrac{621}{575}$.　　(12 分)

21. **解**：(1)直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}x-3$，令 $y=0$，得 $x=\sqrt{3}$，由题意可知 $a=\sqrt{3}$，又 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\therefore c=\sqrt{2}$，$\therefore b^2=a^2-c^2=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=1$，$\therefore$ 所求的 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.　　(3 分)

(2)$\triangle ABC$ 的面积为定值，定值为 $\dfrac{9}{4}$.　　(4 分)

设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，$\because \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，

$\therefore p+x_1+x_2=0$，$q+y_1+y_2=0$，$\therefore p=-(x_1+x_2)$，$q=-(y_1+y_2)$.

由直线 l 的方程和椭圆方程联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+y^2=1\\ y=kx+m\end{cases}$，

可得 $(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-3=0$，

$\Delta=(6km)^2-12(1+3k^2)(m^2-1)=12(3k^2+1-m^2)>0$，由韦达定理可得

$x_1+x_2=\dfrac{-6km}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{3(m^2-1)}{1+3k^2}$，　　（5 分）

$\therefore y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\dfrac{2m}{1+3k^2}$，$p=-(x_1+x_2)=\dfrac{6km}{1+3k^2}$，$q=-(y_1+y_2)=-\dfrac{2m}{1+3k^2}$，

又点 $A(p,q)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上，$\therefore\left(\dfrac{6km}{1+3k^2}\right)^2+3\left(\dfrac{-2m}{1+3k^2}\right)^2=3$，化简可得 $4m^2=1+3k^2$，　　（7 分）

$\therefore |BC|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{-6km}{1+3k^2}\right)^2-4\cdot\dfrac{3(m^2-1)}{1+3k^2}}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3k^2+1-m^2}}{1+3k^2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{4m^2-m^2}}{1+3k^2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{6|m|}{1+3k^2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{6|m|}{4m^2}=\dfrac{3\sqrt{k^2+1}}{2|m|}$，　　（9 分）

点 A 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|pk-q+m|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\left|\dfrac{6km}{1+3k^2}\cdot k+\dfrac{2m}{1+3k^2}+m\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{|3m|}{\sqrt{1+k^2}}$，　　（10 分）

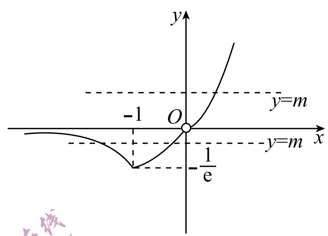
$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot|BC|\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{k^2+1}}{2|m|}\cdot\dfrac{|3m|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{9}{4}$.

$\therefore\triangle ABC$ 的面积为定值 $\dfrac{9}{4}$.　　（12 分）

22. **解**：(1) $\because f(x)=e^x$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$，$\therefore h(x)=f(x)-mg(x)=e^x-\dfrac{m}{x}$，令 $h(x)=0$，可得 $xe^x=m$，设 $W(x)=xe^x\ (x\neq 0)$，则 $W'(x)=(x+1)e^x$，令 $W'(x)=(x+1)e^x>0$，得 $x>-1$，$\therefore W(x)$ 在 $(-1,0)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增；令 $W'(x)=(x+1)e^x<0$，得 $x<-1$，

$\therefore W(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，

$\therefore W(x)_{\min}=W(-1)=-\dfrac{1}{e}$. 当 $x\to-\infty$ 时，$y\to 0$；当 $x\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$，从而可画出 $W(x)$ 的大致图象.



$\therefore$ ①当 $m<-\dfrac{1}{e}$ 或 $m=0$ 时，$h(x)$ 没有零点；

②当 $m=-\dfrac{1}{e}$ 或 $m>0$ 时，$h(x)$ 有一个零点；

③当 $-\dfrac{1}{e}<m<0$ 时，$h(x)$ 有两个零点.　　（4 分）

(2) 当 $x>0$ 时，不等式 $exf(x)\geqslant\dfrac{a+1}{g(x)}+\ln x+2$ 恒成立，可化为 $xe^{x+1}\geqslant(a+1)x+\ln x+2$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，该问题等价于 $xe^{x+1}-\ln x-x-2\geqslant ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $e^{\ln x+x+1}-(\ln x+x+1)-1\geqslant ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，令 $\mu(x)=e^x-x-1$，则 $\mu'(x)=e^x-1$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$\mu'(x)<0$，$\mu(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\mu'(x)>0$，$\mu(x)$ 单调递增，$\therefore\mu(x)\geqslant\mu(0)=0$，$\because(\ln x+x+1)\in\mathbf{R}$，$\mu(\ln x+x+1)\geqslant 0$，即 $e^{\ln x+x+1}-(\ln x+x+1)-1\geqslant 0$，即 $xe^{x+1}-\ln x$

$-x-2\geqslant 0$, （7 分）

①当 $a\leqslant 0$ 时，$\because xe^{x+1}-\ln x-x-2\geqslant 0$，$ax\leqslant 0$，不等式恒成立； （9 分）

②当 $a>0$ 时，令 $v(x)=\ln x+x+1$，显然 $v(x)$ 单调递增，且 $v\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}-1<0$，$v(1)=2>0$，故存在 $x_0\in\left(\frac{1}{e^2},1\right)$，使得 $v(x_0)=0$，所以 $e^{\ln x_0+x_0+1}-(\ln x_0+x_0+1)-1=0$，即 $x_0e^{x_0+1}-\ln x_0-x_0-2=0$，而 $ax_0>0$，此时不满足 $xe^{x+1}-\ln x-x-2\geqslant ax$，所以实数 a 不存在. （11 分）

综上可知，使得 $exf(x)\geqslant\frac{a+1}{g(x)}+\ln x+2$ 恒成立的实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0]$. （12 分）