河北省2023届高三年级大数据应用调研联合测评(Ⅳ)

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	C	B	A	B	C	B	ACD	ABD	ACD	BCD

1.【答案】C

【解析】集合 $A=\{x\mid x<1\}$，$B=\{y\mid y\geqslant 0\}$，故选 C.

2.【答案】D

【解析】根据等式可得 $a^2+b^2-2a-2bi=1-2i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-2a=1, \\ -2b=-2, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a=2, \\ b=1, \end{cases}$ 所以 $z=2+i$，故选 D.

3.【答案】C

【解析】根据题意可得向量 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}=(-4\lambda,3\lambda)$，又因为 $|\boldsymbol{b}|=10 \Leftrightarrow \lambda=\pm 2$，所以向量 $\boldsymbol{b}=(-8,6)$ 或 $\boldsymbol{b}=(8,-6)$，其中当 $\boldsymbol{b}=(8,-6)$ 时，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(8,-6)\cdot(1,1)=8-6=2>0$，满足题意，故选 C.

4.【答案】B

【解析】根据题意得四个不同的小球 A,B,C,D 放入四个不同的盒子中的全部情况有 4^4 种，而满足小球 A,B 放入到同一个盒子中的情况有 4^3 种，所以小球 A,B 放入到同一个盒子中的概率为 $\frac{4^3}{4^4}=\frac{1}{4}$，故选 B.

5.【答案】A

【解析】根据题意得 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}=0$，即 $\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，则 $\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}\right]$，利用图象分析可得，$\frac{7\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}<\frac{8\pi}{3}$，$\therefore\frac{25}{6}\leqslant\omega<\frac{29}{6}$，故选 A.

6.【答案】B

【解析】根据题意得 $\angle PAB=\angle PAC=60^\circ$，所以直线 PA 在平面 ABC 上的投影为 $\angle A$ 的平分线，所以根据三余弦定理可得：设线面角为 θ，$\cos 60^\circ=\cos\theta\cos 45^\circ$，$\therefore\cos\theta=\frac{\cos 60^\circ}{\cos 45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$，故选 B.

7.【答案】C

【解析】根据题意，该双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，直线 l 过该双曲线的右焦点 F，并且 $|AB|=2|BF|$，又因为 $A(-2a,y_0)$，根据横坐标可判断点 A 在渐近线 $y=-\frac{b}{a}x$ 上，代入可得 $A(-2a,2b)$，所以 $|OA|=2c$，从而得到 $\frac{|OA|}{|OF|}=\frac{|AB|}{|BF|}=2$，所以 $\angle AOB=\angle BOF=60^\circ$，所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}\Leftrightarrow e=\frac{c}{a}=2$，故选 C.

8.【答案】B

【解析】由 $g(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x}$，$x\in(1,e^2)$，得 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{2a}{x^3}=\frac{2x-x\ln x-2a}{x^3}$，设 $h(x)=2x-x\ln x-2a$，则 $h'(x)=2-(1+\ln x)=1-\ln x$，由 $h'(x)=0$，得 $x=e$，当 $1<x<e$ 时，$h'(x)>0$；当 $e<x<e^2$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，在 (e,e^2) 上单调递减，且 $h(1)=2-2a$，$h(e)=e-2a$，$h(e^2)=-2a$，显然 $h(1)>h(e^2)$，结合函数图象可知，若 $g(x)$ 在 $(1,e^2)$ 上存在极值，则 $\begin{cases} h(e)>0, \\ h(e^2)<0, \end{cases}$ 解得 $0<a<\frac{e}{2}$，所以当 $0<a<\frac{e}{2}$ 时，$g(x)$ 在 $(1,e^2)$ 上存在极值. 故选 B.

9.【答案】ACD

【解析】根据题意得，函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(2-x)=f(x)$，所以选项 A 正确；函数

$f(x)$的图象关于$(2,0)$对称，所以$f(4-x)=-f(x)$，所以选项B不正确，选项C正确；
$\begin{cases}f(2-x)=f(x),\\f(4-x)=-f(x),\end{cases}$ $\therefore f(4-x)=-f(2-x)$，$\therefore f(2+x)=-f(x)$，$\therefore f(4+x)=f(x)$，所以选项D正确. 故选ACD.

10.**【答案】**ABD

【解析】根据题意可知，直线l为过焦点F，倾斜角为$\frac{\pi}{3}$的直线，所以根据抛物线焦点弦的性质可得$x_1x_2=-p^2$，$y_1y_2=\frac{p^2}{4}$. 对于选项A，$x_1x_2=-p^2=-4$，所以A正确；对于选项B，$y_1y_2=\frac{p^2}{4}=1$，$\therefore p=2$，所以B正确；对于选项C，根据抛物线的焦点弦性质可得$S_{\triangle OMN}=\frac{p^2}{2\sin\theta}=\frac{4}{2\times\frac{1}{2}}=4$（其中$\theta$为直线与$y$轴的夹角），所以选项C错误；对于选项D，$|MN|=|MF|+|NF|=\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{4}{\frac{1}{4}}=16$，

又$\frac{1}{|MF|}+\frac{1}{|NF|}=\frac{2}{p}=1$，$\therefore |MF|=8+4\sqrt{3}$，所以选项D正确. 故选ABD.

11.**【答案】**ACD

【解析】选项A：$a_1=2$，$a_n=3a_{n-1}+2\Leftrightarrow a_2=3a_1+2=8\Leftrightarrow a_3=3a_2+2=26$，所以选项A正确；选项B：$a_n=3a_{n-1}+2\Leftrightarrow a_n+1=3a_{n-1}+3=3(a_{n-1}+1)\Leftrightarrow\frac{a_n+1}{a_{n-1}+1}=3$，所以数列$\{a_n+1\}$为首项为3，公比为3的等比数列，$a_n+1=3\times3^{n-1}=3^n\Leftrightarrow a_n=3^n-1$，所以选项B错误；

选项C：$b_n=na_n=n(3^n-1)=n\times3^n-n$，所以$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1\times3+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+n\times3^n-(1+2+3+\cdots+n)=1\times3+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+n\times3^n-\frac{n(n+1)}{2}$，设$S_n=1\times3+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+n\times3^n$，$3S_n=1\times3^2+2\times3^3+3\times3^4+\cdots+n\times3^{n+1}$，

两式作差可得$-2S_n=1\times3+1\times3^2+1\times3^3+\cdots+1\times3^n-n\times3^{n+1}=\frac{3\times(1-3^n)}{1-3}-n\times3^{n+1}$，

所以$S_n=\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)\times3^{n+1}+\frac{3}{4}$，所以$T_n=\frac{(2n-1)\times3^{n+1}-2n^2-2n+3}{4}$，所以选项C正确；

选项D：$\frac{a_n+1}{a_na_{n+1}}=\frac{3^n}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)$，

所以$\frac{a_1+1}{a_1a_2}+\frac{a_2+1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{a_n+1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3^2-1}\right)+\left(\frac{1}{3^2-1}-\frac{1}{3^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)<\frac{1}{4}$，所以选项D正确. 故选ACD.

12.**【答案】**BCD

【解析】根据题意，在翻折之前，$\angle BAD=\angle BCD=90°$，所以点$A$在以$BD$为直径的圆上，点$C$在以$BD$为直径的圆上，所以在翻折过程中，$A'$、$B$、$C$、$D$四点始终在一个球面上，该球的直径为$BD=4$，所以半径$r=2$，所以该外接球的表面积为$16\pi$，故选项A错误；

因为$A'B\perp A'D$，当$A'B\perp A'C$，即当$A'C=2\sqrt{2}$时，$A'B\perp$平面$A'CD$，可得$A'B\perp CD$，故选项B正确；

当$\tan\theta=2\sqrt{2}$时，过点A作BD的垂线，垂足为E，过点C作BD的垂线，垂足为F，

则$AE=A'E=CF=\sqrt{3}$，$BE=DF=1$，$\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{A'E}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}$，

所以$(\overrightarrow{A'C})^2=(\overrightarrow{A'E}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC})^2=3+4+3+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=8$，故$|A'C|=2\sqrt{2}$，所以选项C正确；

$\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{A'C}|\cdot|\overrightarrow{BD}|\cos\alpha$，$\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{A'E}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC})\cdot\overrightarrow{BD}=8$，又因为$|A'C|=2\sqrt{2}$，

$|BD|=4$，所以 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45°$，所以选项 D 正确．故选 BCD．

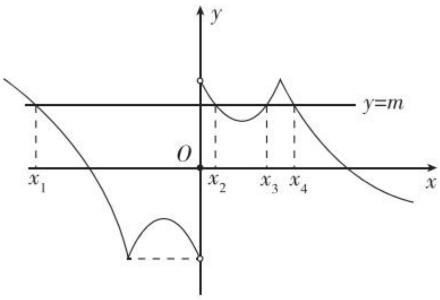
13．【答案】1

【解析】根据题意，$a_2^2+2a_2a_6+a_6^2-4=0\Leftrightarrow(a_2+a_6)^2=4\Leftrightarrow a_2+a_6=2=2a_4\Leftrightarrow a_4=1$，所以答案为 1．

14．【答案】$1-e^{-3}$

【解析】因为 $P(X=k)=\frac{3^k}{k!}e^{-3}$，所以当 $k=0$ 时，$P(X=0)=\frac{3^0}{0!}e^{-3}=e^{-3}$，所以该溶液能够导致生物 C 死亡的概率为 $1-e^{-3}$．

15．【答案】$(2\sqrt{2}-2,1)$（2 分）　$\left(\frac{1}{8},\frac{5}{4}\right)$（3 分）



【解析】因为 $f(-x)=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，函数 $f(x)$ 的图象如图所示，函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 有 7 个零点，等价于函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 有 7 个交点，分析可得

$2\sqrt{2}-2<k<1$；

由题意及图象知 $1<m<2$，$x_1+x_2+x_3+x_4=x_1+x_4+2$，

由题意知 $-\log_{\frac{1}{2}}\left(-2x_1-\frac{15}{4}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(2x_4-\frac{15}{4}\right)$，

$\therefore\log_{\frac{1}{2}}\left(2x_4-\frac{15}{4}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(-2x_1-\frac{15}{4}\right)=0$，

$\therefore\log_{\frac{1}{2}}\left[\left(2x_4-\frac{15}{4}\right)\left(-2x_1-\frac{15}{4}\right)\right]=0$，即 $\left(2x_4-\frac{15}{4}\right)\left(-2x_1-\frac{15}{4}\right)=1$，

$\therefore x_1=\frac{1}{\frac{15}{2}-4x_4}-\frac{15}{8}$，

$\therefore x_1+x_4=x_4+\frac{1}{\frac{15}{2}-4x_4}-\frac{15}{8}$，

又 $1<\log_{\frac{1}{2}}\left(2x_4-\frac{15}{4}\right)<2$，$\therefore 2<x_4<\frac{17}{8}$，

而 $y=x_4+\frac{1}{\frac{15}{2}-4x_4}-\frac{15}{8}$ 在 $\left(2,\frac{17}{8}\right)$ 上单调递增，

$\therefore-\frac{15}{8}<y<-\frac{3}{4}$，

$\therefore\frac{1}{8}<x_1+x_2+x_3+x_4<\frac{5}{4}$．

16．【答案】$(-\infty,1]$

【解析】因为 $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}x^2-ax$，则 $f(0)=0$，$f'(x)=\cos x+x-a$，

令 $h(x)=f'(x)$，则 $h'(x)=1-\sin x\geqslant 0$，$h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，

当 $a\leqslant 1$ 时，$x\geqslant 0$，$h(x)\geqslant h(0)=1-a\geqslant 0$，即 $f'(x)\geqslant 0$，

$\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，$g(x)\geqslant g(0)=0$，$f(x)=\sin x+\frac{1}{2}x^2-ax\geqslant 0$ 恒成立．

当 $a>1$ 时，$h(0)=1-a<0$，$h(a+2)=a+2-a+\cos(a+2)>0$，

$\therefore$ 存在 $x_0\in(0,a+2)$，

使得 $h(x_0)=0$，且 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)<0$，即 $f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，且 $f(x)<f(0)$，即 $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}x^2-ax<0$，不符合题意．

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,1]$．

17.【解析】(1)根据题意，$\dfrac{\sin B+\sin C}{\sin A-\sin C}=\dfrac{\sin A+\sin C}{\sin B}$，

由正弦定理得$\dfrac{b+c}{a-c}=\dfrac{a+c}{b}$，…… 2分

$\therefore b^2+bc=a^2-c^2$，

$\therefore b^2+c^2-a^2=-bc$，

$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，…… 4分

又$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{2\pi}{3}$. …… 5分

(2)因为$a=\sqrt{7}$，$A=\dfrac{2\pi}{3}$，根据余弦定理可得：

$-\dfrac{1}{2}=\dfrac{b^2+c^2-7}{2bc}$，$-bc+7=b^2+c^2=(b+c)^2-2bc$，$bc+7=(b+c)^2$，…… 7分

又因为角A的平分线$AD=\dfrac{2}{3}$，

所以$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}$，$\therefore \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times c\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times b\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\times b\times c\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \dfrac{2}{3}(b+c)=bc$，

两式结合可得$\dfrac{9}{4}(bc)^2-bc-7=0$，$\therefore bc=2$，…… 9分

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times b\times c\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. …… 10分

18.【解析】(1)因为数据t与$\ln y$之间存在很强的线性回归关系，可设$\ln y=\hat{b}t+\hat{a}$，…… 1分

t	1	2	3	4
$\ln y$	1	3	4	5

通过计算可以得到$\bar{t}=\dfrac{5}{2}$，$\overline{\ln y}=\dfrac{13}{4}$，…… 3分

根据公式可得：$\hat{b}=\dfrac{1+6+12+20-4\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{13}{4}}{1+4+9+16-4\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=1.3$，

又因为点$\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{13}{4}\right)$在回归直线$\ln y=\hat{b}t+\hat{a}$上，

代入可得：$\hat{a}=0$，…… 5分

所以$\ln y=1.3t\Leftrightarrow y=e^{1.3t}$. …… 6分

(2)根据题意可知，该污染物的污染面积平均增长率为$y=\dfrac{e^{1.3t}}{t}$，…… 8分

求导可得：$y'=\dfrac{1.3te^{1.3t}-e^{1.3t}}{t^2}=\dfrac{e^{1.3t}(1.3t-1)}{t^2}$，…… 9分

分析可得：当$0<t<\dfrac{10}{13}$时，$y'<0$；

当$t>\dfrac{10}{13}$时，$y'>0$，…… 11分

所以污染面积平均增长率随着时间的增长呈现先减后增的单调过程，

所有当$t=\dfrac{10}{13}$时，该污染物的污染面积平均增长最慢. …… 12分

19.【解析】(1)根据题意,$a_n+a_{n-1}=8n+2$,$a_{n-1}+a_{n-2}=8n-6$,

两式作差可得 $a_n-a_{n-2}=8$,

因为数列$\{a_n\}$为等差数列,所以公差为 4, …… 2 分

又 $a_2+a_1=18$,$2a_1+4=18$,$a_1=7$,

所以 $a_n=7+4(n-1)=4n+3$, …… 4 分

由 $a_2+b_2=20$ 可得 $b_2=9$,

所以 $b_n=9\times3^{n-2}=3^n$. …… 6 分

(2)由(1)得 $a_n=4n+3$,可得 $a_{46}=187$, …… 8 分

$b_n=3^n$,可得 $b_4=81$,$b_5=3^5=243$, …… 9 分

分析可得,新数列$\{c_n\}$的前 50 项由数列$\{a_n\}$的前 46 项与数列$\{b_n\}$的前 4 项组成, …… 10 分

$S_{50}=\dfrac{46\times(7+187)}{2}+\dfrac{3\times(1-3^4)}{1-3}=4\ 582$. …… 12 分

20.【解析】(1)取 AC 的中点 O,连接 OP,OB,设 $PA=PB=PC=AC=1$,

所以 $PO\perp AC$,$PO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

又因为$\triangle ABC$ 为以 AC 为斜边的等腰直角三角形,所以 $OB=\dfrac{1}{2}$,

所以 $PO^2+BO^2=PB^2\Leftrightarrow PO\perp OB$, …… 2 分

又 $PO\perp AC$,$OB\cap AC=O$,所以 $PO\perp$平面 ABC,

又 $PO\subset$平面 PAC,所以平面 $PAC\perp$平面 ABC. …… 4 分

(2)因为 $PO\perp$平面 ABC,故以 O 为原点,OB 为 x 轴,OC 为 y 轴,OP 为 z 轴建立空间直角坐标系,

取 BC 的中点 E,连接 OE,DE,

同理可证 $BC\perp$平面 DOE,$OE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$BE=CD=\sqrt{2}$, …… 5 分

$O(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$C(0,1,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,$A(0,-1,0)$

设 $D(x,y,z)$,则$(x-1)^2+y^2+z^2=2$,①$x^2+(y-1)^2+z^2=2$,②,所以 $x=y$,

所以 $\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{CD}=(x,y-1,z)$,

设平面 DBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,

所以$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=0\\\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$,$\therefore\begin{cases}-a+b=0\\ax+b(y-1)+cz=0\end{cases}$

令 $a=1$,则 $\boldsymbol{n}=\left(1,1,\dfrac{1-x-y}{z}\right)$. …… 7 分

因为平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$,

所以$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\dfrac{1-x-y}{z}}{\sqrt{1+1+\left(\dfrac{1-x-y}{z}\right)^2}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,$\therefore1-x-y=\pm z$, …… 8 分

若 $1-x-y=z$,则由①③得 $x=0$ 或 $x=1$,

所以 $D(0,0,1)$(舍去)或 $D(1,1,-1)$,此时 $AD=\sqrt{6}$,

若 $1-x-y=-z$,则由①③得 $x=0$ 或 $x=1$,

所以 $D(0,0,-1)$或 $D(1,1,1)$,此时 $AD=\sqrt{2}$或 $AD=\sqrt{6}$, …… 11 分

综上,$AD=\sqrt{2}$或 $AD=\sqrt{6}$. …… 12 分

21.【解析】(1)设椭圆 E 的方程为$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$,

点 $P(x,y)(y\neq0)$满足$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$, …… 1 分

由已知 $A(-m,0)$,$B(m,0)$,

$k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y}{x+m}\times\dfrac{y}{x-m}=\dfrac{y^2}{x^2-m^2}=-\dfrac{n^2}{m^2}=-\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow 3n^2=4m^2$, ………………………… 2 分

又因为该椭圆的焦距为 $2c=2\Leftrightarrow c=1$,

可得 $m^2=3,n^2=4$, ………………………… 3 分

所以椭圆 E 的方程为$\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1$. ………………………… 4 分

(2)①当直线 l_1 的斜率存在且不为 0 时,设直线 l_1 的方程为 $y=kx+1$,其中 $k\neq 0$,设点 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$,

联立$\begin{cases}y=kx+1,\\ \dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1,\end{cases}$ $(3k^2+4)x^2+6kx-9=0$,

$\Delta=36k^2+36(3k^2+4)=144(k^2+1)>0$,

所以,$x_1+x_2=-\dfrac{6k}{3k^2+4}$,………………………… 6 分

$\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{k(x_1+x_2)}{2}+1=\dfrac{4}{3k^2+4}$,

故 MN 的中点坐标为$\left(-\dfrac{3k}{3k^2+4},\dfrac{4}{3k^2+4}\right)$, ………………………… 7 分

同理可得 PQ 的中点坐标为$\left(\dfrac{3k}{4k^2+3},\dfrac{4k^2}{4k^2+3}\right)$,………………………… 8 分

所以,直线 ST 的斜率为$\dfrac{\dfrac{4k^2}{4k^2+3}-\dfrac{4}{3k^2+4}}{\dfrac{3k}{4k^2+3}+\dfrac{3k}{3k^2+4}}=\dfrac{4(k^2-1)}{7k}$.

所以直线 ST 的方程为 $y-\dfrac{4}{3k^2+4}=\dfrac{4(k^2-1)}{7k}\left(x+\dfrac{3k}{3k^2+4}\right)$,即 $x=\dfrac{7k}{4(k^2-1)}\left(y-\dfrac{4}{7}\right)$, ………… 9 分

因此,直线 ST 过定点$\left(0,\dfrac{4}{7}\right)$. ………………………… 10 分

②当直线 l_1 斜率不存在时,l_1 方程为 $x=0$,l_2 方程为 $y=1$,

此时,直线 ST 方程为 $x=0$,过点$\left(0,\dfrac{4}{7}\right)$. ………………………… 11 分

③当直线 l_1 的斜率存在且为 0 时,l_1 方程为 $y=1$,l_2 方程为 $x=0$,

直线 ST 方程为 $x=0$,过点$\left(0,\dfrac{4}{7}\right)$. ………………………… 12 分

22.【解析】(1)依题意,$f'(x)=2mxe^{-x}-(mx^2+1)e^{-x}=-e^{-x}(mx^2-2mx+1)$. ………… 1 分

若 $m=0$,则 $f'(x)=-e^{-x}<0$; ………………………… 2 分

若 $m\neq 0$,则 $y=mx^2-2mx+1$ 为二次函数,其中 $\Delta=4m^2-4m=4m(m-1)$.

若 $\Delta\leqslant 0$,即 $0<m\leqslant 1$ 时,$y=mx^2-2mx+1\geqslant 0$,则 $f'(x)\leqslant 0$; ………………………… 3 分

若 $\Delta>0$,令 $y=mx^2-2mx+1=0$,解得 $x=\dfrac{2m\pm 2\sqrt{m(m-1)}}{2m}=1\pm\dfrac{\sqrt{m(m-1)}}{m}$.

若 $m<0$,则当 $x\in\left(-\infty,1+\dfrac{\sqrt{m(m-1)}}{m}\right)$时,$f'(x)>0$,

当 $x\in\left(1+\dfrac{\sqrt{m(m-1)}}{m},1-\dfrac{\sqrt{m(m-1)}}{m}\right)$时,$f'(x)<0$,

当 $x\in\left(1-\dfrac{\sqrt{m(m-1)}}{m},+\infty\right)$时,$f'(x)>0$;………………………… 4 分

若 $m>1$，则当 $x\in\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{m(m-1)}}{m}\right)$ 时，$f'(x)<0$，

当 $x\in\left(1-\frac{\sqrt{m(m-1)}}{m},1+\frac{\sqrt{m(m-1)}}{m}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(1+\frac{\sqrt{m(m-1)}}{m},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$.

………………………………………………………………………………………… 5 分

综上所述，当 $0\leqslant m\leqslant 1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；

当 $m>1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{m(m-1)}}{m}\right)$ 和 $\left(1+\frac{\sqrt{m(m-1)}}{m},+\infty\right)$ 上单调递减，

在 $\left(1-\frac{\sqrt{m(m-1)}}{m},1+\frac{\sqrt{m(m-1)}}{m}\right)$ 上单调递增；

当 $m<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,1+\frac{\sqrt{m(m-1)}}{m}\right)$ 和 $\left(1-\frac{\sqrt{m(m-1)}}{m},+\infty\right)$ 上单调递增，

在 $\left(1+\frac{\sqrt{m(m-1)}}{m},1-\frac{\sqrt{m(m-1)}}{m}\right)$ 上单调递减. ………………………………………… 6 分

(2)依题意，令 $g(x)=(mx^2+1)e^{-x}+nxe^{-x}-1=0$，解得 $e^x=mx^2+nx+1$，

令 $h(x)=e^x-mx^2-nx-1$，则 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内有零点；………………………………………… 7 分

设 x_0 为 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内的一个零点，

则由 $h(0)=0,h(1)=0$ 知 $h(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 和 $(x_0,1)$ 上不可能单调；

设 $\varphi(x)=h'(x)$，则 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 和 $(x_0,1)$ 上均存在零点，…………………………… 8 分

即 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上至少有两个零点，$h'(x)=e^x-2mx-n$，$\varphi'(x)=e^x-2m$.

当 $m\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上递增，$\varphi(x)$ 不可能有两个及以上零点；

当 $m\geqslant\frac{e}{2}$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上递减，$\varphi(x)$ 不可能有两个及以上零点；

当 $\frac{1}{2}<m<\frac{e}{2}$ 时，令 $\varphi'(x)=0$ 得 $x=\ln(2m)\in(0,1)$，所以 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,\ln(2m))$ 上递减，在 $(\ln(2m),1)$ 上递增，$\varphi(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上存在最小值 $\varphi(\ln(2m))$；

若 $\varphi(x)$ 有两个零点，则有：$\varphi(\ln(2m))<0,\varphi(0)>0,\varphi(1)>0$；

$\varphi(\ln(2m))=2m-2m\ln(2m)-n=3m-2m\ln(2m)+1-e\left(\frac{1}{2}<m<\frac{e}{2}\right)$；

设 $F(x)=\frac{3}{2}x-x\ln x+1-e(1<x<e)$，$F'(x)=\frac{1}{2}-\ln x$，……………………………… 10 分

令 $F'(x)=0$，得 $x=\sqrt{e}$.

当 $1<x<\sqrt{e}$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增，

当 $\sqrt{e}<x<e$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减，

$[F(x)]_{\max}=F(\sqrt{e})=\sqrt{e}+1-e<0$，所以 $\varphi(\ln(2m))<0$ 恒成立.

由 $\varphi(0)=1-n=m-e+2>0$，$\varphi(1)=e-2m-n>0$，得 $e-2<m<1$.

当 $e-2<m<1$ 时，设 $\varphi(x)$ 的两个零点为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，则 $h(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上递增，在 (x_1,x_2) 上递减，在 $(x_2,1)$ 上递增，所以 $h(x_1)>h(0)=0$，$h(x_2)<h(1)=0$，则 $h(x)$ 在 (x_1,x_2) 内有零点.

综上所述，实数 m 的取值范围是 $(e-2,1)$. ……………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。