

理科数学参考解答及评分参考

1. A 2. C 3. C 4. A 5. D 6. A 7. D 8. C 9. B 10. C 11. B 12. D

13. 2 14. $\frac{1}{2}$ 15. $\sqrt{10}$ 16. $3\sqrt{3}$

17. 解析: (1) 由题, 来源: 高三答案公众号

$$\text{得 } K^2 = \frac{200 \times (20 \times 50 - 30 \times 100)^2}{50 \times 150 \times 120 \times 80} = \frac{100}{9} \approx 11.11 > 6.635, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

因此, 有 99% 的把握认为客户对该产品的评价结果与性别有关系. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 顾客甲若想采用方案二的方式购买一件产品, 设可能支付的金额为 X , X 的值可能为 180, 220. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$\text{由题 } P(X=180) = \frac{4}{10} = 0.4; P(X=220) = \frac{6}{10} = 0.6, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{则 } E(X) = 180 \times 0.4 + 220 \times 0.6 = 204 \text{ (元)},$$

顾客甲若采用方案二的方式购买一件产品, 需支付金额的估计值为 204 (元). $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

顾客甲若采用方案一的方式购买一件产品, 需支付金额为 $260 \times 0.8 = 208$ (元). $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

所以, 该顾客采用方案二的方式购买较为合理. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

18. 解析: (1) 由已知 $a_1 + a_1 + 4 = a_1 + 6$, 所以 $a_1 = 2$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 由 $b_1 = 3, b_3 - b_2 = 18$

$$\text{则 } 3q^2 - 3q = 18, \text{ 即 } q^2 - q - 6 = 0,$$

$$\text{解得 } q = 3, q = -2 \text{ (舍去)},$$

所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3^n$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 由 (1) 得 $c_n = 2n \cdot 3^n$,

$$\text{所以 } T_n = 2 \times 3 + 4 \times 3^2 + 6 \times 3^3 + \dots + 2n \cdot 3^n \quad \textcircled{1} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$3T_n = 2 \times 3^2 + 4 \times 3^3 + 6 \times 3^4 + \dots + 2(n-1)3^n + 2n \cdot 3^{n+1} \quad \textcircled{2} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } -2T_n = 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \dots + 2 \times 3^n - 2n \cdot 3^{n+1},$$

$$\text{所以 } -T_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n - n \cdot 3^{n+1} = \frac{3(1-3^n)}{1-3} - n \cdot 3^{n+1}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{即 } -T_n = -\frac{3}{2} + \frac{3^{n+1}}{2} - n \cdot 3^{n+1},$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{3}{2} + \frac{2n-1}{2} \cdot 3^{n+1}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解析: (1) 证明: 设 $PN \perp$ 平面 ABC 于点 N ,

过 N 作 $NE \perp AB$ 于 E , $NF \perp AC$ 于 F , 连接 PE, PF .

因为 $PN \perp$ 平面 ABC , $ABC \subset$ 平面 ABC , 所以 $PN \perp AB$.

又因为 $NE \perp AB$, 所以 $AB \perp$ 平面 PNE , 所以 $AB \perp PE$, 同理 $AC \perp PF$ 2 分

在 $Rt\triangle PAE, Rt\triangle PAF$ 中, $\angle PAE = \angle PAF, PA = PA$,

故 $\triangle PAE \cong \triangle PAF$, 所以 $AF = AE$.

在 $Rt\triangle ANE, Rt\triangle ANF$ 中, $AF = AE, AN = AN$,

故 $\triangle ANE \cong \triangle ANF$, 所以 $NE = NF$ 4 分

即 N 到 AB, AC 的距离相等, 同理 N 到 BC, AC 的距离相等,

故 N 为 $\triangle ABC$ 的内心, N 与 H 重合.

所以 $PH \perp$ 平面 ABC .

又因为 $PH \subset$ 平面 APM , 所以平面 $PAM \perp$ 平面 ABC 6 分

(2) 由于 $AB \perp BC$, 故可以以 B 为坐标原点, BC 为 x 轴, BA 为 y 轴建立如图所示空间直角坐标系, 则 $B(0, 0, 0), C(4, 0, 0), A(0, 3, 0)$ 7 分

设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r , 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} r(3+4+5)$, 故 $r=1$.

所以 $H(1, 1, 0), AH = \sqrt{r^2 + AE^2} = \sqrt{5}, PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = 2$, 故 $P(1, 1, 2)$.

所以 $\overrightarrow{HP} = (0, 0, 2), \overrightarrow{HA} = (-1, 2, 0)$,

设平面 AHP 的法向量 $n_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} n_1 \cdot \overrightarrow{HP} = 2z_1 = 0, \\ n_1 \cdot \overrightarrow{HA} = -x_1 + 2y_1 = 0. \end{cases} \quad \text{令 } y_1 = 1,$$

故平面 AHP 的一个法向量为 $n_1 = (2, 1, 0)$ 9 分

同理 $\overrightarrow{AP} = (1, -2, 2), \overrightarrow{AC} = (4, -3, 0)$,

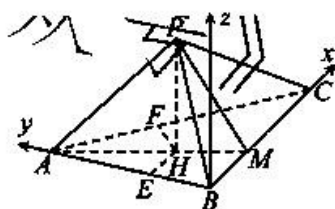
设平面 ACP 的法向量 $n_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} n_2 \cdot \overrightarrow{AP} = x_2 - 2y_2 + 2z_2 = 0, \\ n_2 \cdot \overrightarrow{AC} = 4x_2 - 3y_2 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } x_2 = 6,$$

故平面 ACP 的一个法向量为 $n_2 = (6, 8, 5)$ 10 分

$$\text{所以 } \cos \langle n_1, n_2 \rangle = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{4}{5},$$

故二面角 $M-PA-C$ 的余弦值为 $\frac{4}{5}$



20. 解析: (1) 椭圆经过点 A, T , 代入椭圆 E 的方程, 得
$$\begin{cases} b^2 = 1, \\ \frac{64}{25a^2} + \frac{9}{25b^2} = 1, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 1. \end{cases}$$

所以椭圆 E 的方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 2 分

由 $\angle MAT = \angle NAT$ 知 AM 与 AN 关于直线 $AT: y = x + 1$ 对称,

在 AM 上任取一点 $P_0(x_0, y_0)$,

则 P_0 关于直线 $y = x + 1$ 对称的点为 $P'_0(y_0 - 1, x_0 + 1)$, 3 分

从而 $k_1 = k_{AP_0} = \frac{y_0 - 1}{x_0}, k_2 = k_{AP'_0} = \frac{(x_0 + 1) - 1}{y_0 - 1}$,

于是 $k_1 k_2 = 1$ 4 分

(2) 设点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), AM: y = k_1 x + 1$,

由 $\begin{cases} y = k_1 x + 1, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$ 得 $(4k_1^2 + 1)x^2 + 8k_1 x = 0$, 所以 $x_1 = -\frac{8k_1}{4k_1^2 + 1}$,

同理 $x_2 = -\frac{8k_2}{4k_2^2 + 1}$.

由 (1) 有 $k_1 k_2 = 1$, 故 $x_2 = -\frac{8k_1}{4 + k_1^2}$ 6 分

为方便, 记 $k_1 = k$, 并不妨设 $k > 1$, 则

于是 $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} |AM| \cdot |AN| \sin \angle MAN = \frac{1}{2} |AM| \cdot |AN| \sqrt{1 - \cos^2 \angle MAN}$

$= \frac{1}{2} \sqrt{|AM|^2 |AN|^2 - (\vec{AM} \cdot \vec{AN})^2}$

$= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1^2 + k_1^2 x_1^2)(x_2^2 + k_2^2 x_2^2) - (x_1 x_2 + k_1 x_1 k_2 x_2)^2}$

$= \frac{1}{2} |x_1 k_2 x_2 - x_2 k_1 x_1|$ 8 分

$= \frac{1}{2} |k_2 - k_1| \cdot |x_1 x_2| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{k} - k \right| \cdot \left| \frac{-8k}{4k^2 + 1} \cdot \frac{-8k}{4 + k^2} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2 - 1}{k} \cdot \frac{64k^2}{(4k^2 + 1)(4 + k^2)}$

$= \frac{32k(k^2 - 1)}{(4k^2 + 1)(4 + k^2)} = \frac{32k(k^2 - 1)}{4k^4 + 17k^2 + 4}$ 10 分

$= \frac{32\left(k - \frac{1}{k}\right)}{4k^2 + \frac{4}{k^2} + 17} = \frac{32t}{4t^2 + 25} \leq \frac{32}{2\sqrt{4 \times 25}} = \frac{32}{2 \times 10} = \frac{8}{5}$ (其中 $t = k - \frac{1}{k} > 0$),

当且仅当 $t = \frac{5}{2}$, 即 $k - \frac{1}{k} = \frac{5}{2}$ 时取等.

所以, $\triangle AMN$ 面积的最大值为 $\frac{8}{5}$ 12 分

21. 解析: (1) 由题 $f(x) = ae^x - x^2$ 得 $f'(x) = ae^x - 2x$,

因为函数 $f(x)$ 有两个极值点,

所以方程 $f'(x) = 0$ 有两个不同实数根, 即方程 $a = \frac{2x}{e^x}$ 有两个不同实数根, 2 分

设 $u(x) = \frac{2x}{e^x}$, 则 $u'(x) = \frac{2-2x}{e^x}$,

知 $x < 1$ 时, $u'(x) > 0$, 则 $u(x)$ 单调递增, $x > 1$ 时, $u'(x) < 0$, 则 $u(x)$ 单调递减,

所以, $x = 1$ 时, $u(x)$ 取得极大值 $u(1) = \frac{2}{e}$,

又 $x < 0$ 时, $u(x) < 0$; $x > 0$ 时, $u(x) > 0$, 且 $x \rightarrow +\infty$ 时, $u(x) \rightarrow 0$,

所以, 方程 $a = \frac{2x}{e^x}$ 有两个不同实数根时, 有 $0 < a < \frac{2}{e}$.

即 $f(x)$ 有两个极值点时, a 的取值范围是 $(0, \frac{2}{e})$ 5 分

(2) 由(1)可知, $f(x)$ 的两个极值点 x_1, x_2 是方程 $ae^x - 2x = 0$ 的两根,

且 $0 < a < \frac{2}{e}, 0 < x_1 < 1 < x_2$, 则有 $ae^{x_1} = 2x_1 > 0, ae^{x_2} = 2x_2 > 0$, , *以与*

两式相除, 得 $e^{x_2-x_1} = \frac{x_2}{x_1}$, 则有 $x_2 - x_1 = \ln \frac{x_2}{x_1} > 0$ 6 分

由 $ex_1 + (e-2)x_2 \geq \lambda x_1 x_2$ 得 $(x_2 - x_1)[ex_1 + (e-2)x_2] \geq \lambda x_1 x_2 \ln \frac{x_2}{x_1}$,

所以 $\lambda \leq \frac{2 + (e-2)\frac{x_2}{x_1} - e \cdot \frac{x_1}{x_2}}{\ln \frac{x_2}{x_1}}$, 令 $t = \frac{x_2}{x_1} > 1$, 7 分

令 $h(t) = \frac{2 + (e-2)t - e \cdot \frac{1}{t}}{\ln t} (t > 1)$, 则需 $\lambda \leq h(t)$ 恒成立,

$h'(t) = \frac{[(e-2)t^2 + e] \ln t - 2t - (e-2)t^2 + e}{t^2 \ln^2 t}$,

令 $\varphi(t) = [(e-2)t^2 + e] \ln t - 2t - (e-2)t^2 + e$,

则 $\varphi'(t) = 2(e-2)t \ln t - 2 - (e-2)t + e \cdot \frac{1}{t}$,

令 $p(t) = \varphi'(t) = 2(e-2)t \ln t - 2 - (e-2)t + e \cdot \frac{1}{t}$,

$p'(t) = 2(e-2) \ln t + 2(e-2) - e \cdot \frac{1}{t^2} - e + 2$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增,

可知 $p'(1) < 0, p'(e) > 0$, 则存在 $t_0 \in (1, e)$, 使得 $p'(t_0) = 0$,

当 $t \in (1, t_0)$ 时, $p'(t) < 0$, 则 $p(t)$ 即 $\varphi'(t)$ 单调递减, 当 $t \in (t_0, +\infty)$ 时, $p'(t) > 0$, $p(t)$ 即 $\varphi'(t)$ 单调递增, 来源: 高三答案公众号

又 $\varphi'(1) = 0, \varphi'(e) > 0$, 所以存在 $t_1 \in (1, e)$, 使得 $\varphi'(t_1) = 0$, 10分

当 $t \in (1, t_1)$ 时, $\varphi'(t) < 0$, $\varphi(t)$ 单调递减, $t \in (t_1, +\infty)$ 时, $\varphi'(t) > 0$, $\varphi(t)$ 单调递增,

又 $\varphi(1) = \varphi(e) = 0$, 所以 $t \in (1, e)$ 时, $\varphi(t) < 0$, 则 $h'(t) < 0$, $h(t)$ 单调递减, $t \in (e, +\infty)$ 时, $\varphi(t) > 0, h'(t) > 0, h(t)$ 单调递增,

所以 $t=e$ 时, $h(t)_{\min} = h(e) = (e-1)^2$, λ 的取值范围是 $\lambda \leq (e-1)^2$ 12分

22. 解析: (1) 将 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 代入 $4\rho^2 \sin^2 \theta = 3(\rho^2 - 1)$, 得

$4y^2 = 3(x^2 + y^2) - 3$,

即曲线 C 的直角坐标方程为: $3x^2 - y^2 - 3 = 0$ 5分

(2) 直线 l 的参数方程可改写为 $\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 6分

代入曲线 C 的方程, 有 $3\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 - \left(\frac{1}{2}t\right)^2 = 3$,

整理得 $2t^2 + 6\sqrt{3}t + 9 = 0$ 7分

从而 $t_1 + t_2 = -3\sqrt{3}, t_1 t_2 = \frac{9}{2}$, 8分

所以 $|AB| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = 3$ 10分

23. 解析: (1) 当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, $f(x) = -2x + 3 - 2x - 1 \leq 6 - x$, 解得 $-\frac{4}{3} \leq x < -\frac{1}{2}$;

当 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ 时, $f(x) = -2x + 3 + 2x + 1 \leq 6 - x$, 解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$;

当 $x > \frac{3}{2}$ 时, $f(x) = 2x - 3 + 2x + 1 \leq 6 - x$, 解得 $\frac{3}{2} < x \leq \frac{8}{5}$,

综上所述, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{8}{5}\right\}$

(2)由题 $f(x) = |2x-3| + |2x+1| \geq |2x-3-(2x+1)| = 4$, 当且仅当 $(2x-3)(2x+1) \leq 0$
即 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ 时取“等号”, 故 $f(x)$ 的最小值 $T=4$, 即 $x+y+2z=4$.

证法 1:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} = \frac{1}{10} [(x+1) + (y+1) + 2(z+2)] \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} \right)$$

$$\geq \frac{1}{10} \left[\sqrt{(x+1) \cdot \frac{1}{x+1}} + \sqrt{(y+1) \cdot \frac{1}{y+1}} + \sqrt{2(z+2) \cdot \frac{2}{z+2}} \right]^2 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5},$$

当且仅当 $(x+1)^2 = (y+1)^2 = (z+2)^2$, 即 $x=y=\frac{3}{2}, z=\frac{1}{2}$ 时取等号.

所以, $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} \geq \frac{8}{5}$ 10分

证法 2:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} = \frac{1}{10} [(x+1) + (y+1) + 2(z+2)] \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} \right)$$

$$= \frac{1}{10} \left[6 + \frac{y+1}{x+1} + \frac{x+1}{y+1} + \frac{2(z+2)}{x+1} + \frac{2(x+1)}{z+2} + \frac{2(z+2)}{y+1} + \frac{2(y+1)}{z+2} \right]$$

$$\geq \frac{1}{10} \left[6 + 2\sqrt{\frac{y+1}{x+1} \cdot \frac{x+1}{y+1}} + 2\sqrt{\frac{2(z+2)}{x+1} \cdot \frac{2(x+1)}{z+2}} + 2\sqrt{\frac{2(z+2)}{y+1} \cdot \frac{2(y+1)}{z+2}} \right] = \frac{8}{5}.$$

当且仅当 $\frac{y+1}{x+1} = \frac{x+1}{y+1}, \frac{2(z+2)}{x+1} = \frac{2(x+1)}{z+2}, \frac{2(z+2)}{y+1} = \frac{2(y+1)}{z+2}$ 取等号,

即 $x=y=\frac{3}{2}, z=\frac{1}{2}$ 时取等号.

所以, $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} \geq \frac{8}{5}$ 10分

，以巧

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线