

山西大学附中  
2023~2024 学年第一学期高三 10 月月考（总第四次）

数学试题

考查时间：120 分钟 满分：150 分 考查内容：高考综合

命题人：吴晨晨

审核人：张耀军

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的，请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

1. 若复数  $z$  满足  $(1+2i)z=1$ ，则  $z$  的共轭复数是（ ）

- A.  $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$       B.  $-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$       C.  $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$       D.  $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

2. 若集合  $A=\{x|2<x<3\}$ ， $B=\{x|x>b, b\in\mathbb{R}\}$ ，则  $A\subseteq B$  的充要条件是（ ）

- A.  $b\geq 3$       B.  $2<b\leq 3$       C.  $b<2$       D.  $b\leq 2$

3. 二项式  $\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$  展开式的常数项为（ ）

- A. -160      B. 60      C. 120      D. 240

4. 某玻璃制品厂需要生产一种如图 1 所示的玻璃杯，该玻璃杯造型可以近似看成是一个圆柱挖去一个圆台得到，其近似模型的直观图如图 2 所示（图中数据单位为 cm），则该玻璃杯所用玻璃的体积（单位： $\text{cm}^3$ ）为（ ）



图1

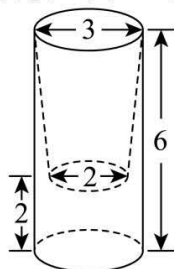


图2

- A.  $\frac{43\pi}{6}$       B.  $\frac{47\pi}{6}$       C.  $\frac{51\pi}{6}$       D.  $\frac{55\pi}{6}$

5. 若  $e^a = -\ln a, e^{-b} = \ln b, e^{-c} = -\ln c$ ，则（ ）

- A.  $a < b < c$       B.  $a < c < b$       C.  $b < c < a$       D.  $b < a < c$

6. 有 6 名选手（含选手甲、乙）参加了男子 100 米赛跑决赛（无并列名次），则在甲比乙快的条件下，甲、乙两人名次相邻的概率为（ ）

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{6}$       C.  $\frac{1}{3}$       D.  $\frac{1}{4}$

7. 已知  $S_n$  是等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，且  $S_n = 2^{n+1} + a$ ，则  $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{10} a_{11} =$ （ ）

- A.  $\frac{2^{23}-8}{3}$       B.  $\frac{2^{13}-8}{3}$       C.  $\frac{2^{20}-1}{3}$       D.  $\frac{2^{25}-8}{3}$

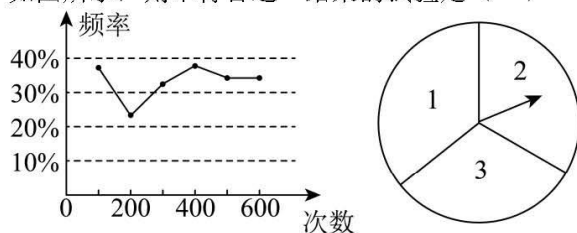
8. 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ ，椭圆  $C$  上的两点  $A, B$  关于原点对称，且满足  $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$ ， $|\overrightarrow{FB}| \leq |\overrightarrow{FA}| \leq 3|\overrightarrow{FB}|$ ，则椭圆  $C$  的离心率的取值范围是（ ）

试卷第 1 页，共 4 页

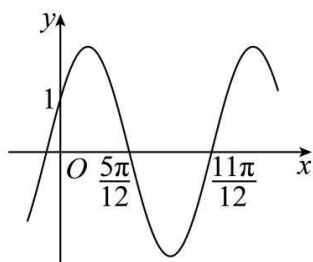
- A.  $\left[\frac{\sqrt{5}}{3}, 1\right)$     B.  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{4}\right]$     C.  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}-1\right]$     D.  $[\sqrt{3}-1, 1)$

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分。每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 5 分，选对但不全得 2 分，有选错得 0 分。

9. 两名同学在一次用频率估计概率的试验中统计了某一结果出现的频率，绘制出统计图如图所示，则不符合这一结果的试验是 ( )



- A. 抛一枚硬币，正面朝上的概率  
B. 掷一枚正六面体的骰子，出现 1 点的概率  
C. 转动如图所示的转盘，转到数字为奇数的概率  
D. 从装有 2 个红球和 1 个蓝球的口袋中任取一个球恰好是蓝球的概率
10. 函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示，将  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度得函数  $g(x)$  的图象，则 ( )



- A.  $\omega = 2$     B.  $g(x)$  的图象关于点  $(-\pi, 0)$  对称  
C.  $g(x)$  在  $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$  上单调递增    D.  $g(x)$  在  $(0, \pi)$  上有两个极值点
11. 函数  $f(x)$  的定义域为  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，其导函数为  $f'(x)$ ，若  $[x + f(x)] \sin x = f'(x) \cos x$ ，且  $f(0) = 0$ ，则 ( )
- A.  $f(x)$  是减函数    B.  $f(x)$  是增函数  
C.  $f(x)$  有最大值    D.  $f(x)$  没有极值
12. 已知三棱锥  $A-BCD$  的棱长均为 6，其内有  $n$  个小球，球  $O_1$  与三棱锥  $A-BCD$  的四个面都相切，球  $O_2$  与三棱锥  $A-BCD$  的三个面和球  $O_1$  都相切，如此类推，……，球  $O_n$  与三棱锥  $A-BCD$  的三个面和球  $O_{n-1}$  都相切 ( $n \geq 2$ ，且  $n \in \mathbf{N}^*$ )，球  $O_n$  的表面积为  $S_n$ ，体积为  $V_n$ ，则 ( )

A.  $V_1 = \frac{\sqrt{6}}{8}\pi$

B.  $S_3 = \frac{3\pi}{8}$

C. 数列  $\{V_n\}$  是公比为  $\frac{1}{8}$  的等比数列

D. 数列  $\{S_n\}$  的前  $n$  项和为  $8\pi\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分。

13. 已知向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，则  $\vec{a} + \vec{b}$  与  $\vec{a}$  的夹角是\_\_\_\_\_。

14. 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对的边为  $a, b, c$ ，且  $\sin^2 B + \sin^2 C + \sin B \sin C = \sin^2 A$ ， $a = 7, b = 5$ ，则  $c =$ \_\_\_\_\_。

15. 若正实数  $a, b$  满足  $a + b = 1$ ，则  $\frac{b^2}{a+1} + \frac{a^2}{b+2}$  的最小值为\_\_\_\_\_。

16. 新冠病毒肺炎疫情防控难度极大，某地防疫防控部门决定进行全面入户排查 4 类人员：新冠患者、疑似患者、普通感冒发热者和新冠密切接触者，过程中排查到一户 6 口之家被确认为新冠肺炎密切接触者，按要求进一步对该 6 名成员逐一进行核糖核酸检测，若出现阳性，则该家庭定义为“感染高危户”，设该家庭每个成员检测呈阳性的概率相同均为  $p$  ( $0 < p < 1$ )，且相互独立，该家庭至少检测了 5 人才能确定为“感染高危户”的概率为  $f(p)$ ，当  $p = p_0$  时， $f(p)$  最大，此时  $P_0 =$ \_\_\_\_\_。

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，数列  $\{b_n\}$  是等比数列，满足  $a_1 = 3$ ， $b_1 = 1$ ， $b_2 + S_2 = 10$ ， $a_5 - 2b_2 = a_3$ 。

(1) 求数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式；

(2) 令  $c_n = \begin{cases} \frac{2}{S_n}, n \text{ 为奇数,} \\ b_n, n \text{ 为偶数,} \end{cases}$  设数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ ，求  $T_{2n}$ 。

18. (12 分) 信用是指依附在人与人之间、单位之间和商品交易之间形成的一种相互信任的生产关系和社会关系。良好的信用对个人和社会的发展有着重要的作用。某地推行信用积分制度，将信用积分从高到低分为五档，其中信用积分超过 150 分为信用极好；信用积分在  $(120, 150]$  内为信用优秀；信用积分在  $(100, 120]$  内为信用良好；信用积分在  $(80, 100]$  内为轻微失信；信用积分不超过 80 分的信用较差。该地推行信用积分制度一段时间后，为了解信用积分制度推行的效果，该地政府从该地居民中随机抽取 200 名居民，并得到他们的信用积分数据，如下表所示。

信用等级	信用极好	信用优秀	信用良好	轻微失信	信用较差
人数	25	60	65	35	15

(1) 从这 200 名居民中随机抽取 2 人，求这 2 人都是信用极好的概率。

(2) 为巩固信用积分制度，该地政府对信用极好的居民发放 100 元电子消费金；对信用优秀或信用良好的居民发放 50 元消费金；对轻微失信或信用较差的居民不发放消费金。若以表中各信用等级的频率视为相应信用等级的概率，现从该地居民中随机抽取 2 人，记这 2 人获得的消费金总额为  $X$  元，求  $X$  的分布列与期望。

19. (12分) 长方形  $ABCD$  中,  $AB = 2AD = 2\sqrt{2}$ , 点  $E$  为  $CD$  中点(如图1), 将点  $D$  绕  $AE$  旋转至点  $P$  处, 使平面  $PAE \perp$  平面  $ABCE$  (如图2).

(1) 求证:  $PA \perp PB$ ;

(2) 点  $F$  在线段  $PB$  上, 当二面角  $F-AE-P$  大小为  $\frac{\pi}{4}$  时, 求四棱锥  $F-ABCE$  的体积.

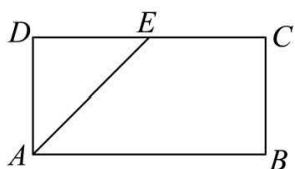


图1

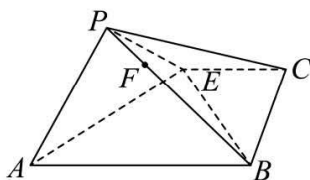


图2

20. (12分) 已知函数  $f(x) = 2\ln x - x^2 + ax (a \in R)$ .

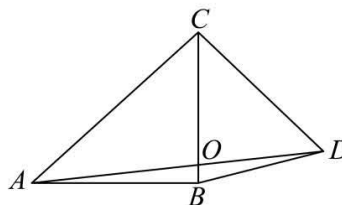
(1) 当  $a = 0$  时, 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若函数  $g(x) = f(x) - ax + m$  在  $\left[\frac{1}{e}, e\right]$  上有两个零点, 求实数  $m$  的取值范围.

21. (12分) 已知平面四边形  $ABDC$  中, 对角线  $CB$  为钝角  $\angle ACD$  的平分线,  $CB$  与  $AD$  相交于点  $O$ ,  $AC = 5$ ,  $AD = 7$ ,  $\cos \angle ACD = -\frac{1}{5}$ .

(1) 求  $CO$  的长;

(2) 若  $BC = BD$ , 求  $\triangle ABD$  的面积.



22. (12分) 已知函数  $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$ .

(1) 当  $a = e$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积

(2) 若不等式  $f(x) \geq 1$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

