

## 高三数学试卷参考答案(文科)

1. D 因为  $\varepsilon = \sqrt{2}$ , 所以  $\varepsilon^2 = -2, \varepsilon^3 = 1$ .
2. A 因为  $A = (0, 16), B = (-1, 1)$ , 所以  $A \cup B = (-1, 16)$ .
3. B 因为  $f(-x) = \frac{(-x)^2}{2-x} = -f(x)$ , 所以  $f(x)$  为奇函数, 排除 AC. 当  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$ , 排除 D, 故选 B.
4. C 由  $a \parallel b$  得  $x^2 = 1$ , 即  $x = \pm 2$  或  $x = 0$ . 因为  $b$  为非零向量, 所以  $x = \pm 2$ , 即  $|x| = 2$ . 故 “ $|x| = 2$ ” 是 “ $a \parallel b$ ” 的充要条件.
5. B 由题意可知该曲面棱柱的底面积  $S = \frac{9(\pi - \sqrt{3})}{2}$ . 设  $AB = r$ , 则  $3 \times (\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2) + \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \frac{9(\pi - \sqrt{3})}{2}$ , 解得  $r = 3$ .
6. D 因为  $1 < a = 1.3^{0.1} < 2, b = \log_2 5 > 2, c = 0, 9^{0.2} < 1$ , 所以  $c < a < b$ .
7. D 由题意可得  $a_3 = 2a_1 - 2 = 2(2a_1 - 1) - 2 = 4(2a_1 + 2) = 8(2a_1 - 1) + 8 = 16a_1 = 16, a_8 = 2a_1 - 1 = 2(2a_1 - 2) - 1 = 4(2a_1 - 1) + 3 = 127$ , 则  $a_3 + a_8 = 16 + 127 = 143$ .
8. B 甲、乙同学所选的科目情况有(化学, 化学), (化学, 生物), (生物, 化学), (生物, 生物), (政治, 化学), (政治, 生物), 共 6 种, 其中甲、乙同学所选的科目相同的情况有(化学, 化学), (生物, 生物), 共 2 种, 故所求概率  $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .
9. D 因为  $\angle AMB = \frac{2\pi}{3}$ , 所以圆心  $M$  到渐近线的距离等于半径的一半, 则  $\frac{ab}{c} = \frac{1}{2}$ , 则  $a^2(c^2 - a^2) = \frac{c^4}{4}$ , 即  $(\frac{c}{a})^4 - 1(\frac{c}{a})^2 + 1 = 0$ , 解得  $(\frac{c}{a})^2 = 2$ , 则双曲线  $C$  的离心率为  $\sqrt{2}$ .
10. D 当  $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]$  时,  $2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}]$ , 则  $-\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$ , 解得  $-\frac{3\pi}{2} < a \leq \pi$ ;  
当  $x \in [-\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}]$  时,  $2x + \frac{\pi}{6} \in [-\frac{1\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, \frac{1\pi}{3}]$ , 则  $\frac{\pi}{2} \leq \frac{1\pi}{3} - \frac{\pi}{6} < \frac{1\pi}{3}$ , 解得  $\frac{5\pi}{12} \leq a < \frac{3\pi}{21}$ . 综上,  $a$  的取值范围是  $[\frac{5\pi}{12}, \pi]$ .
11. A 由题意可得  $f'(x) = \frac{1}{x} - 2$ , 令  $f'(x) = \frac{1}{x} - 2 = -1$ , 解得  $x = 1$  ( $x = -\frac{1}{2}$  舍去), 因为  $f(1) = -1$ , 所以点  $(1, -1)$  到直线  $x + y - 1 = 0$  的距离  $d = \frac{|1 - 1 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则  $A, B$  之间的最短距离是  $2\sqrt{2}$ .
12. A 设  $\triangle ABC$  外接圆的半径为  $r$ , 则  $r = \frac{1\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ} = 1$ . 设球  $O$  的半径为  $R$ . 因为三棱锥  $P-ABC$  体积的最大值是  $32\sqrt{3}$ , 所以  $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (1\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{R^2 - 1^2} - R) = 32\sqrt{3}$ , 解得  $R = 5$ , 故

【高三数学·参考答案】第 1 页(共 5 页)文(科)



球  $O$  的表面积是  $4\pi R^2 = 100\pi$ .

13. 120 由题意可知  $P(X > 120) = P(X < 60) = 0.1$ , 则数学成绩为优秀的人数是  $1200 \times 0.1 = 120$ .

14. 7 画出可行域(图略), 则直线  $z = 2x - y$  经过点  $(1, 1)$  时,  $z$  取得最大值, 且最大值是 7.

15.  $\frac{1}{n}$  因为  $(n-1)a_{n+1}^2 - na_n^2 - a_{n+1}a_n = 0$ .

所以  $[(n-1)a_{n+1} - na_n](a_{n+1} + a_n) = 0$ , 所以  $(n-1)a_{n+1} - na_n = 0$ , 即  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n-1}$ , 则  $\frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{2}$

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$ , 故  $a_n = \frac{1}{n}$ .

16. 2 由题意可知  $F(\frac{p}{2}, 0)$ , 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $S_{\triangle OFB} = \frac{1}{2} \cdot |OF| \cdot |y_2| = \frac{p}{2} |DE|$ .

$$S_{\triangle OFB} = \frac{|AD| - |BE|}{2} \cdot |DE| = \frac{x_1 + \frac{p}{2} - x_2 - \frac{p}{2}}{2} \cdot |DE| = \frac{x_1 + x_2 - p}{2} \cdot |DE|$$

因为  $S_{\triangle OFB} = \frac{1}{4} S_{\triangle OFA}$ , 所以  $x_1 + x_2 = 3p$ . 由题意可知直线  $l$  的斜率不为 0, 设直线  $l$  的方程为  $x = my - \frac{p}{2}$ , 联立  $\begin{cases} x = my - \frac{p}{2} \\ y^2 = 2px \end{cases}$  整理得  $y^2 - 2mpty - p^2 = 0$ , 则  $y_1 - y_2 = 2mp, y_1 y_2 = -p^2$ , 从而  $x_1 - x_2 = m(y_1 - y_2) - p = (2m^2 + 1)p = 3p$ , 解得  $m^2 = 1$ , 故  $|y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 - 4y_1 y_2} = 2\sqrt{2}p$ , 即  $|DE| = 2\sqrt{2}p$ . 因为  $S_{\triangle OFB} = 4\sqrt{2}$ , 所以  $\sqrt{2}p^2 = 4\sqrt{2}$ , 解得  $p = 2$ .

17. 解: (1) 由题意得  $\bar{x} = \frac{2+1+5+6+8}{5} = 5, \bar{y} = \frac{3+1+6+5+7}{5} = 5$ , ..... 2 分

因为  $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 115, x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5 = 138$ , ..... 4 分

所以  $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y} = 138 - 5 \times 5 \times 5 = 13$ .

$$\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2} = \sqrt{115 - 5 \times 5^2} = 2\sqrt{5}, \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{故 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{13}{2\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{2}}{20} \approx 0.92, \dots \dots \dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) b = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{13}{20} = 0.65, \hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} = 5 - 0.65 \times 5 = 1.75, \dots \dots \dots 8 \text{ 分}$$

故线性回归直线方程为  $\hat{y} = 0.65x + 1.75$ , ..... 9 分

(3) 当  $x = 10$  时,  $\hat{y} = 0.65 \times 10 + 1.75 = 8.25$  百万元, ..... 12 分

【高三数学·参考答案 第 2 页(共 5 页)页码: 2】



18. (1)证明:由四边形  $ABCD$  为矩形,得  $AD \perp CD$ . ..... 1分  
 因为  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $CD \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $PA \perp CD$ . ..... 3分  
 因为  $PA \cap AD = A$ , 所以  $CD \perp$  平面  $PAD$ . ..... 4分  
 因为  $CD \subset$  平面  $PCD$ , 所以平面  $PAD \perp$  平面  $PCD$ . ..... 5分  
 (2)解:因为  $AD = 3AE$ ,  $AD = 3$ , 所以  $AE = 1$ . ..... 6分  
 因为四边形  $ABCE$  的面积  $S = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1 = 2$ . ..... 8分  
 所以  $V_{P-ABCE} = \frac{1}{3} \times PA \times S = \frac{1}{3} \times 3 \times 2 = 2$ . ..... 12分

19. 解:(1)因为  $\sqrt{2}(\sin(A + \frac{\pi}{4})) = b$ , 所以  $\sqrt{2}(\sin C \cos A + \cos C \sin A) = \sin B$ .  
 即  $\sin C \sin A + \sin C \cos A = \sin B$ . ..... 2分  
 因为  $A + B + C = \pi$ , 所以  $\sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$ . ..... 3分  
 所以  $\sin C = \cos C$ , 即  $\tan C = 1$ . ..... 4分  
 因为  $0 < C < \pi$ , 所以  $C = \frac{\pi}{4}$ . ..... 5分

(2)因为  $D$  为  $AB$  边的中点, 所以  $\vec{CD} = \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB}$ . ..... 6分  
 所以  $|\vec{CD}|^2 = \frac{1}{4}(\vec{CA}^2 + 2\vec{CA} \cdot \vec{CB} + \vec{CB}^2) = \frac{b^2 - a^2 - 2ab \cos C}{4} = \frac{b^2 - 1b - 8}{4} = \frac{(b-2)^2 + 1}{4}$ . ..... 8分

在  $\triangle ABC$  中, 由正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ , 得  $b = \frac{2\sqrt{2} \sin B}{\sin(B + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan B}}$ . ..... 9分

- 因为  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 且  $C = \frac{\pi}{4}$ , 所以  $B \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ . ..... 10分  
 则  $\tan B \in (1, +\infty)$ , 故  $b \in (2, 4)$ . ..... 11分  
 因为  $b \in (2, 4)$ , 所以  $|\vec{CD}| \in (\sqrt{5}, \sqrt{10})$ , 即线段  $CD$  长的取值范围为  $(\sqrt{5}, \sqrt{10})$ . ..... 12分

20. 解:(1)设椭圆  $C$  的焦距为  $2c$ , 来源: 高三答案公众号

由题意可得  $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{1}{a^2} = 1, \\ c^2 = a^2 - b^2, \end{cases}$  解得  $a=2, b=1$ . ..... 3分

故椭圆  $C$  的标准方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . ..... 5分

(2)由题意可知直线  $l$  的斜率不为 0, 设直线  $l: x = my + 6, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ .

联立  $\begin{cases} x = my + 6, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$  整理得  $(m^2 + 4)y^2 + 12my - 32 = 0$ .

则  $\Delta = 144m^2 - 4(m^2 + 4) \times (-32) = 16(m^2 + 32) > 0$ .

【高三数学·参考答案 第 3 页(共 5 页)文科·2】



$$x_1 - x_2 = -\frac{12m}{m^2+1}, x_1 x_2 = \frac{32}{m^2+1} \quad \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$\text{因为 } P(2,0), \text{ 所以 } k_1 = \frac{x_1}{x_1-2}, k_2 = \frac{x_2}{x_2-2} \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{所以 } k_1 k_2 = \frac{x_1}{x_1-2} \times \frac{x_2}{x_2-2} = \frac{x_1 x_2}{(m x_1 + 1)(m x_2 + 1)} = \frac{x_1 x_2}{m^2 x_1 x_2 + 4m(x_1 + x_2) + 16} \quad \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$= \frac{\frac{32}{m^2+1}}{m^2 \cdot \frac{32}{m^2+1} + 4m \cdot (-\frac{12m}{m^2+1}) + 16} = \frac{32}{32m^2 - 48m^2 + 16m^2 + 16} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

故  $k_1 k_2$  为定值, 该定值为  $\frac{1}{2}$ .  $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

21. (1) 解: 因为  $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)$ , 所以  $f(x)$  的定义域为  $(-1, +\infty)$ .

$$\text{且 } f'(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} \quad \dots\dots\dots 1 \text{分}$$

因为  $x > -1$ , 所以  $f'(x) \geq 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(-1, +\infty)$  上单调递增.  $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

因为  $f(0) = 0$ , 所以当  $-1 < x < 0$  时,  $f(x) < 0$ ; 当  $x = 0$  时,  $f(x) = 0$ ;

当  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$ .  $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

(2) 证明: 由(1)可知当  $x \in [0, 1)$  时,  $\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \geq 0$ , 即  $\ln(x+1) \geq x - \frac{x^2}{2}$ .  $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

同理当  $x \in (-1, 0]$  时,  $\ln(1-x) \leq x - \frac{x^2}{2}$ , 即当  $x \in [-0, 1)$  时,  $\ln(1-x) \leq -x - \frac{x^2}{2}$ .  $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

则  $\ln(x+1) - \ln(1-x) \geq 2x$ , 故  $x[\ln(x+1) - \ln(1-x)] + 4\cos x - 4 \geq 2x^2 + 4\cos x - 4$ .

$\dots\dots\dots 7 \text{分}$

设  $g(x) = 2x^2 + 4\cos x - 4$ , 则  $g'(x) = 4x - 4\sin x$ .  $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

设  $h(x) = 4x - 4\sin x$ , 则  $h'(x) = 4 - 4\cos x \geq 0$ , 从而  $h(x)$  在  $[0, 1)$  上单调递增.  $\dots\dots\dots 9 \text{分}$

因为  $h(0) = 0$ , 所以  $h(x) \geq 0$ , 即  $g'(x) \geq 0$ , 所以  $g(x)$  在  $[0, 1)$  上单调递增.  $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

则  $g(x) \geq g(0) = 0$ , 即  $2x^2 + 4\cos x - 4 \geq 0$ .  $\dots\dots\dots 11 \text{分}$

故对任意的  $x \in [0, 1)$ ,  $x[\ln(x+1) - \ln(1-x)] + 4\cos x - 4 \geq 0$  恒成立.  $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

22. 解: (1) 由  $y = \sqrt{-x^2+1}$ , 得  $y^2 = -x^2+1$  ( $y \geq 0$ ).  $\dots\dots\dots 1 \text{分}$

则  $x^2 + y^2 = 1$  ( $y \geq 0$ ), 则  $\rho^2 = 1 \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ).  $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

所以曲线  $M$  的极坐标方程为  $\rho = 1 \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ).  $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

由  $x = 9$ , 得  $\rho^2 \cos \theta \sin \theta = 9$ , 即  $\rho^2 \sin 2\theta = 18$ .

此即曲线  $N$  的极坐标方程.  $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 将  $\theta = \theta_0$  代入  $\rho^2 \sin 2\theta = 18$ , 得  $|OB| = \rho = \sqrt{\frac{18}{\sin 2\theta_0}}$ .  $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

将  $\theta = \theta_0$  代入  $\rho = 1 \cos \theta$ , 得  $|OA| = \rho = 1 \cos \theta_0$ .  $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

【高三数学·参考答案 第 1 页(共 5 页)文科·2】



则  $|OA| \cdot |OB| = \frac{12}{\sqrt{\tan \theta_0}}$ . ..... 8分

因为  $|OA| \cdot |OB| = 12$ , 所以  $\tan \theta_0 = 1$ , 又  $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ . ..... 10分

【注】曲线  $N$  的极坐标方程写为  $\rho^2 \cos \theta \cdot \sin \theta = 9$  也可以, 不扣分.

23. (1) 证明: 因为  $f(x) = |x-a-1| - |x-2a| \geq |x-a-1-(x-2a)| = |a-1|$ . ..... 2分

所以  $f(x)_{\min} = |a-1|$ . ..... 3分

由  $|a-1| \geq 1$ , 得  $a \leq 0$  或  $a \geq 2$ . ..... 4分

则当  $a \geq 2$  时,  $f(x) \geq 1$  恒成立, 所以存在  $a \in (0, +\infty)$ , 使得  $f(x) \geq 1$  恒成立. .... 5分

(2) 解: 当  $x \in [2a, 1]$  时,  $f(x) = |x-a-1| - x - 2a$ .

由  $f(x) \leq x+a$ , 得  $|x-a-1| \leq 3a$ . ..... 6分

则  $-3a \leq x-a-1 \leq 3a$ , 即  $-2a-1 \leq x \leq 4a-1$ . ..... 7分

因为当  $x \in [2a, 1]$  时,  $f(x) \leq x+a$ , 所以  $\begin{cases} -2a-1 \leq 2a, \\ |a-1| \geq 1. \end{cases}$  ..... 8分

解得  $a \geq \frac{3}{4}$ . ..... 9分

又  $2a < 1$ , 所以  $a$  的取值范围是  $[\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ . ..... 10分



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线