2023年甘肃省第二次高考诊断考试

理科数学试题答案及评分参考

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.C　2.D　3.B　4.D　5.C　6.D　7.B　8.C　9.A　10.D　11.A　12.A

11.解:可知$A_1(-\sqrt{2},0)$,$A_2(\sqrt{2},0)$,设$P(x,y)$,

则$k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=\frac{y}{x+\sqrt{2}}\cdot\frac{y}{x-\sqrt{2}}=\frac{y^2}{x^2-2}=1$,

设$k_{PA_1}=k(k\neq0$,且$k\neq\pm1)$,则$k_{PA_2}=\frac{1}{k}$,

故直线PA_1的方程为$kx-y+\sqrt{2}k=0$,直线PA_2的方程为$x-ky-\sqrt{2}=0$,

原点到两直线的距离分别为$d_1=\frac{\sqrt{2}|k|}{\sqrt{1+k^2}}$,$d_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+k^2}}$,

所以$d_1\cdot d_2=\frac{2|k|}{1+k^2}\leqslant\frac{2|k|}{2|k|}=1$,当且仅当$k=\pm1$时,"="成立,但此时两直线平行,这是不可能的,等号不能成立,故选A.

12.可知$0<\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}<a=\cos\frac{2\pi}{7}<\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$,

对于函数$f(x)=\frac{2^x}{x}$,由于$f'(x)=\frac{2^x\cdot x\ln2-2^x}{x^2}=\frac{2^x(x\ln2-1)}{x^2}$,所以当$0<x<1$时,

$f'(x)<0$,$f(x)$为减函数,所以$f(1)<f(\frac{\sqrt{2}}{2})<f(a)<f(\frac{1}{2})$,即$2<\frac{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}<\frac{2^a}{a}<\frac{2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$,

所以$2^{a-\frac{1}{2}}<2a$,A正确;$\sqrt{2}a>2^{a-1}$,B错误;$2^{a-1}>a$,C错误;$2^{a-\frac{1}{2}}>(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}a$,D错误.
故选A.

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

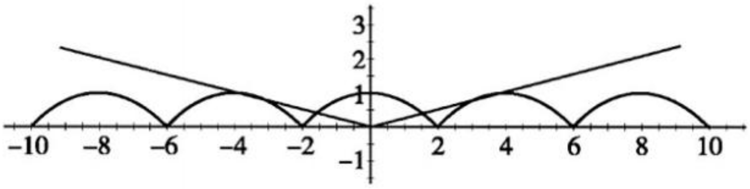
13.2080　14.$\frac{2\sqrt{2}}{5}$　15.$21n-19$　$\frac{2023}{4050}$　16.4

15.解:可知$\{c_n\}$是首项为2,公差为21的等差数列,故其通项公式为$c_n=21n-19$,

所以$d_n=n+1$,$\frac{1}{d_nd_{n+1}}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$,$S_{2023}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2024}-\frac{1}{2025}$,

$S_{2023}=\frac{2023}{4050}$.

16. 解：由题意可知函数 $y=f(x)$ 是以 4 为周期的偶函数，



由于 $16f(x)=4|x|+1 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{4}|x|+\frac{1}{16}$，故原方程的实根就是函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=\frac{1}{4}|x|+\frac{1}{16}$ 的图象的交点的横坐标，

又可知当 $2\leqslant x\leqslant 6$ 时，$f(x)=-\frac{1}{4}(x-4)^2+1=-\frac{1}{4}x^2+2x-3$，

由 $\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x^2+2x-3 \\ y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{16} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=\frac{15}{16} \end{cases}$

由图可知，当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，两函数图象只有一个交点，当 $2\leqslant x\leqslant 6$ 时，两函数图象只有一个交点，又由于两个函数均为偶函数，故两个函数图象有 4 个交点，所以原方程有 4 个根.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17 ~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17. 解：(1) 若选① $a^2-b^2+c^2=2$，由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，整理得 $ac\cos B=1$，则 $\cos B>0$，

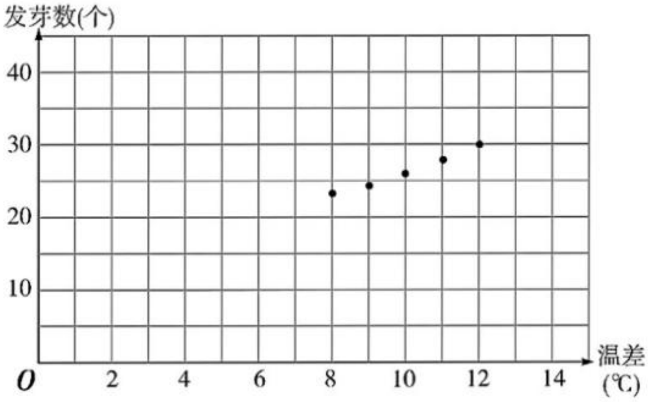
又 $\sin B=\frac{1}{3}$，则 $\cos B=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$ac=\frac{1}{\cos B}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{8}$；

若选② $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-1<0$，则 $\cos B>0$，又 $\sin B=\frac{1}{3}$，则 $\cos B=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ $=-ac\cos B$，得 $ac=\frac{1}{\cos B}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{8}$. ································ 6 分

(2) 由正弦定理得：$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，则 $\frac{b^2}{\sin^2 B}=\frac{a}{\sin A}\cdot\frac{c}{\sin C}=\frac{ac}{\sin A\sin C}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}=\frac{9}{4}$，

则 $\frac{b}{\sin B}=\frac{3}{2}$，$b=\frac{3}{2}\sin B=\frac{1}{2}$. ·· 12 分

18. 解:(1)由于五个点明显分布在某条直线的附近,因此由散点图可以判断 y 与 x 有明显的线性相关关系. ········· 3 分



(2)设直线的方程为 $y-26=k(x-10)$,

即 $y=k(x-10)+26$,

则五个 x 值对应的直线 l 上的纵坐标分别为

$-2k+26,-k+26,26,k+26,2k+26$,

若设观察值与纵坐标差的平方和为 D,则

$D=(-2k+3)^2+(-k+2)^2+(k-1)^2+(2k-4)^2=10k^2-34k+30=10\left(k-\frac{17}{10}\right)^2+\frac{11}{10}$,

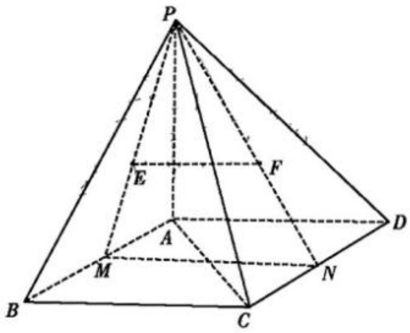
所以当 $k=\frac{17}{10}$时 D 取最小值,此时直线 l 的方程为 $y=\frac{17}{10}x+9$. ·························· 9 分

(3)可预测当温度差为 15°C 时,蔬菜种子发芽的个数约为 35.(此处回答 34 也可) ······
·· 12 分

19. 证明:(1)延长 PE 交 AB 于 M,延长 PF 交 CD 于 N,

因为 E,F 分别为$\triangle PAB$ 和$\triangle PCD$ 的重心,

所以 M,N 分别为 AB,CD 的中点,且$\frac{PE}{PM}=\frac{PF}{PN}=\frac{2}{3}$,



又因为底面 $ABCD$ 为平行四边形,

所以 $MN/\!/BC/\!/EF$,

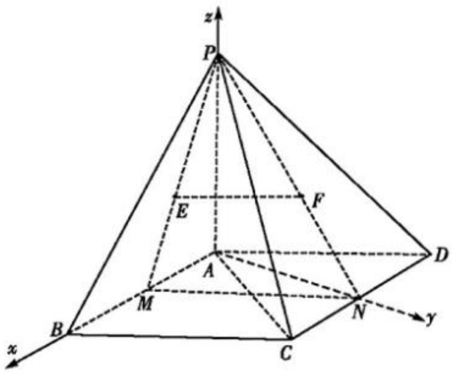
又因为 $BC\subset$平面 PBC,$EF\not\subset$平面 PBC,

所以 $EF/\!/$平面 PBC. ·································· 6 分

解(2)(方法一)因为 $PA\perp$平面 $ABCD$,所以 $AC\perp PA$,

又因为 $PD\perp AC$,且 $PD\cap PA=P$,所以 $AC\perp$平面 PAD,所以 $AD\perp AC$,

又因为$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$,所以$\triangle BAC$ 和$\triangle ACD$ 均为等腰直角三角形,$\angle BCA=\angle CAD=\frac{\pi}{2}$.



又因为 N 为 CD 的中点,所以 $AB\perp AN\perp AP$,

故如图建立空间直角坐标系,因为 $PA=AB=2$,易得 $P(0,0,2)$,$M(1,0,0)$,$N(0,1,0)$,$C(1,1,0)$,

$\overrightarrow{PM}=(1,0,-2)$,$\overrightarrow{PN}=(0,1,-2)$,

设平面 PMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$,则由 $\boldsymbol{n}_1\perp PM$,$\boldsymbol{n}_1\perp PN$,得$\begin{cases}x-2z=0\\y-2z=0\end{cases}$

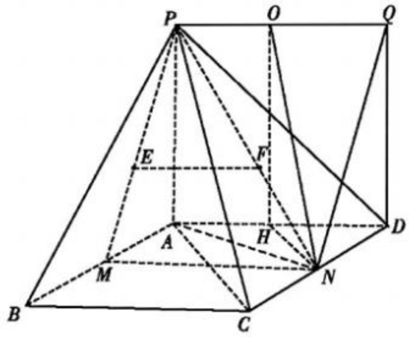
令 $z=1$,得 $\boldsymbol{n}_1=(2,2,1)$,又因为平面 PAD 的一个法向量为 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$,

设平面 PEF 与平面 PAD 所成二面角的平面角为 θ,则 $|\cos\theta|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,如图所示二面角为锐角,所以 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. ………………………………………………………… 12 分

(方法二)过 P 作 $PQ // AD // MN$,且 $PQ=AD=MN$,连接 NQ 和 DQ,

取 AD 的中点为 H,易知 $NH\perp$ 平面 PAD,过 H 作 $HO\perp PQ$ 于 O,

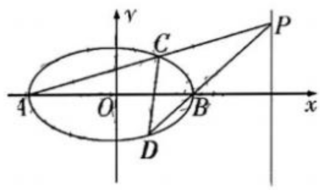
则 $NO\perp PQ$,所以 $\angle NOH$ 为平面 PEF 与平面 PAD 所成二面角的平面角,



因为 $NH=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$HO=2$,

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle NHO$ 中,$\tan\angle NOH=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. ……………… 12 分

20. (1)证明:由已知得:$a=2$,$A(-2,0)$,$B(2,0)$,设 $M(x_0,y_0)(x_0\neq\pm2)$,因为 M 在椭圆上,所以 $b^2x_0^2+4y_0^2=4b^2$①



因为 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\dfrac{y_0}{x_0+2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-2}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-4}=-\dfrac{3}{4}$,

将①式代入,得 $4b^2-b^2x_0^2=12-3x_0^2$,得 $b^2=3$,

所以椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………………… 4 分

(2)①设 $P(4,t)(t\neq0)$,

则 $k_{PA}=\dfrac{t}{6}$,$l_{PA}:x=\dfrac{6}{t}y-2$,同理可得 $k_{PB}=\dfrac{t}{2}$,$l_{PB}:x=\dfrac{2}{t}y+2$,

联立方程 $\begin{cases}x=\dfrac{6}{t}y-2\\3x^2+4y^2-12=0\end{cases}$,得 $y_C=\dfrac{18t}{27+t^2}$,$x_C=\dfrac{54-2t^2}{27+t^2}$

则 $C(\dfrac{54-2t^2}{27+t^2},\dfrac{18t}{27+t^2})$. 同理可得 $D(\dfrac{2t^2-6}{3+t^2},\dfrac{-6t}{3+t^2})$

椭圆的右焦点为 $F_2(1,0)$,$\overrightarrow{F_2C}=(\dfrac{27-3t^2}{27+t^2},\dfrac{18t}{27+t^2})$,$\overrightarrow{F_2D}=(\dfrac{t^2-9}{3+t^2},\dfrac{-6t}{3+t^2})$,

因为 $\dfrac{27-3t^2}{27+t^2}\times\dfrac{-6t}{3+t^2}-\dfrac{18t}{27+t^2}\times\dfrac{t^2-9}{3+t^2}=0$,

说明 C,D,F_2 三点共线,即直线 CD 恒过 F_2 点. ………………………………………… 8 分

②因为直线 CD 恒过 F_2 点,所以 $C_{\triangle CF_1D}=4a$,

设$\triangle CF_1D$内切圆的半径为r，

所以$\frac{1}{2}C_{\triangle CF_1D}\cdot r=S_{\triangle CF_1D}$，

即$4a\cdot r=2c\cdot|y_C-y_D|$，即$4r=|y_C-y_D|$，

若内切圆的面积最大，即r最大，也就是$|y_C-y_D|$最大，

因为直线CD的斜率不为0，设直线CD的方程为$x=my+1$，

代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$得：$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

可得$y_C+y_D=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_C\cdot y_D=\frac{-9}{3m^2+4}$，

又因为$|y_C-y_D|=\sqrt{(y_C+y_D)^2-4y_Cy_D}=\frac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$（*）

令$n=\sqrt{m^2+1}(n\geqslant1)$，

（*）式化为：$\frac{12n}{3n^2+1}=\frac{12}{3n+\frac{1}{n}}$，

因为$n\geqslant1$，所以当$n=1$时，（*）式取最大值3，

则$4r\leqslant3$，$r\leqslant\frac{3}{4}$，

所以得到$\triangle CF_1D$内切圆面积的最大值为$\frac{9\pi}{16}$，当$m=0$时取得.

………………………………………………………………………… 12分

21. 解：(1)当$a=4$时，$f(x)=\frac{1}{x}+4\ln x$，则$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}=\frac{4x-1}{x^2}$，

当$x\in(0,\frac{1}{4})$，$f'(x)<0$，函数$f(x)$在$(0,\frac{1}{4})$上单调递减；

当$x\in(\frac{1}{4},+\infty)$，$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$(\frac{1}{4},+\infty)$上单调递增，

所以$f(x)_{\min}=f(\frac{1}{4})=4(1-\ln4)<0$，

又$f(\frac{1}{e^3})=e^3-12>0$，$f(1)=1>0$，所以存在$x_1\in(0,\frac{1}{4})$，$x_2\in(\frac{1}{4},+\infty)$，

使得$f(x_1)=f(x_2)=0$，即$f(x)$的零点个数为2. ………………………… 4分

(2)不等式$f(x+1)+e^x-\frac{1}{x+1}\geqslant1$即为$e^x+a\ln(x+1)\geqslant1$，

设$F(x)=e^x+a\ln(x+1)$，$x\in(-1,+\infty)$，则$F'(x)=e^x+\frac{a}{x+1}=\frac{(x+1)e^x+a}{x+1}$，

设$g(x)=(x+1)e^x+a$，$x\in(-1,+\infty)$，

当 $a\geqslant0$ 时，$g(x)>0$，可得 $F'(x)>0$，则 $F(x)$ 单调递增，此时当 $x\to-1$ 时，$F(x)\to-\infty$，不满足题意；

当 $a<0$ 时，由 $g'(x)=(x+2)e^x>0$，$g(x)$ 单调递增，设 $g(x)=0$ 有唯一的零点 x_0，

即 $(x_0+1)e^{x_0}+a=0$，

当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$g(x)<0$，可得 $F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，可得 $F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增，

所以 $F(x)_{\min}=F(x_0)=e^{x_0}+a\ln(x_0+1)=e^{x_0}+a\ln\dfrac{-a}{e^{x_0}}=e^{x_0}+a\ln(-a)-ax_0$

$=-\dfrac{a}{x_0+1}-ax_0+a\ln(-a)=-a(\dfrac{1}{x_0+1}+x_0)+a\ln(-a)$

$=-a[\dfrac{1}{x_0+1}+(x_0+1)-1]+a\ln(-a)$

因为 $x_0+1>0$，可得 $\dfrac{1}{x_0+1}+x_0+1\geqslant2\sqrt{(\dfrac{1}{x_0+1})\cdot(x_0+1)}=2$，

当且仅当 $x_0=0$ 时，等号成立，所以 $\dfrac{1}{x_0+1}+(x_0+1)-1\geqslant1$，

所以 $-a[\dfrac{1}{x_0+1}+(x_0+1)-1]+a\ln(-a)\geqslant-a+a\ln(-a)$

因为 $F(x)\geqslant1$ 恒成立，即 $-a+a\ln(-a)\geqslant1$ 恒成立，

令 $h(a)=-a+a\ln(-a)$，$a\in(-\infty,0)$，可得 $h'(a)=-1+\ln(-a)+1=\ln(-a)$，

当 $a\in(-\infty,-1)$ 时，$h'(a)>0$，$h(a)$ 单调递增；

当 $a\in(-1,0)$ 时，$h'(a)<0$，$h(a)$ 单调递减，

所以 $h(a)\leqslant h(-1)=1$，即 $h(a)\leqslant1$，

又由 $h(a)\geqslant1$ 恒成立，则 $h(a)=-a+a\ln(-a)=1$，所以 $a=-1$. …………………… 12 分

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22，23 题中选定一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑. 按所涂题号进行评分，不涂，多涂均按所答第一题评分；多答按所答第一题评分.

22. 解：(1) 由曲线 C_1 的参数方程 $\begin{cases}x=-2+2\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数，且 $\alpha\in[0,\pi]$) 可知：

曲线 C_1 是以 $(-2,0)$ 为圆心，2 为半径的圆在 x 轴及上方的部分.

故曲线 C_1 的极坐标方程：$\rho=-4\cos\theta,\theta\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$，

又因为点 P 为曲线 C_1 上任意一点，将点 P 绕坐标原点顺时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 得到点 Q，

设点 $Q(\rho,\theta)$，则点 $P(\rho,\theta+\dfrac{\pi}{2})$，代入曲线 C_1 得到 $\rho=-4\cos(\theta+\dfrac{\pi}{2})=4\sin\theta$，

所以曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$，其中 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. ………………………… 5 分

(2)因为直线 $l:\sqrt{3}x-y-1=0$ 经过点 $F(0,-1)$，

故设过 $F(0,-1)$ 的直线 $\sqrt{3}x-y+1=0$ 的参数方程为：$\begin{cases}x=\frac{1}{2}t\\ y=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ （t 为参数），

代入曲线 C_2 的普通方程：$x^2+(y-2)^2=4, x\in[0,2]$，得：$t^2-3\sqrt{3}t+5=0$，

此方程的两个根 t_1,t_2 为 A,B 两点对应的参数，则 $t_1+t_2=3\sqrt{3}, t_1t_2=5$，所以 $t_1>0, t_2>0$，

所以 $|FA|+|FB|=t_1+t_2=3\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1)函数解析式可化为 $f(x)=\begin{cases}3x, x\geqslant\frac{1}{2},\\ 2-x, -1\leqslant x<\frac{1}{2},\\ -3x, x<-1,\end{cases}$

由 $3x\leqslant3$，得 $x\leqslant1$，因此，$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$；

由 $2-x\leqslant3$，得 $x\geqslant-1$，因此，$-1\leqslant x<\frac{1}{2}$；

由 $-3x\leqslant3$，得 $x\geqslant-1$，此时，无解，

综上可知原不等式的解集是 $\{x|-1\leqslant x\leqslant1\}$. ………………………………………… 5 分

(2)$\because 0<b<\frac{1}{2}<a$，$\therefore f(a)=3a, f(b)=2-b$，

$\because f(a)=3f(b)$，$\therefore a+b=2$，

$\therefore a^2+b^2=a^2+(2-a)^2=2a^2-4a+4=2(a-1)^2+2$，

$\because 0<b<\frac{1}{2}<a$，$\therefore \frac{3}{2}<a<2$，$\therefore a^2+b^2=2(a-1)^2+2>\frac{5}{2}$，

$\because m\in\mathbf{Z}$，

$\therefore m$ 的最大值为 2. ………………………………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。