

北京市西城区高三统一测试

# 数学（文科）

2019.4

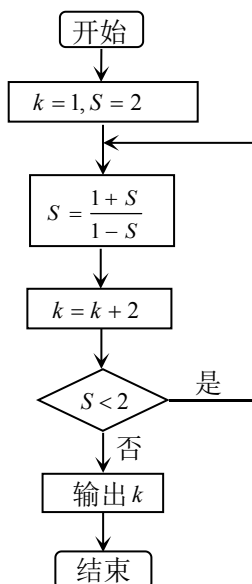
## 第 I 卷（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设全集  $U = \mathbf{R}$ ，集合  $A = \{x | 0 < x < 2\}$ ， $B = \{-3, -1, 1, 3\}$ ，则集合  $(\complement_U A) \cap B =$ 
  - (A)  $\{-3, -1\}$
  - (B)  $\{-3, -1, 3\}$
  - (C)  $\{1, 3\}$
  - (D)  $\{-1, 1\}$
  
2. 若复数  $z = \frac{1-i}{2-i}$ ，则在复平面内  $z$  对应的点位于
  - (A) 第一象限
  - (B) 第二象限
  - (C) 第三象限
  - (D) 第四象限
  
3. 下列函数中，值域为  $\mathbf{R}$  且在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增的是
  - (A)  $y = x^2 + 2x$
  - (B)  $y = 2^{x+1}$
  - (C)  $y = x^3 + 1$
  - (D)  $y = (x-1)|x|$

4. 执行如图所示的程序框图，则输出的  $k$  值为

- (A) 4
- (B) 5
- (C) 7
- (D) 9



5. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=2$ ,  $\sin(A+B)=\frac{1}{3}$ ,  $\sin A=\frac{1}{4}$ , 则 $c=$

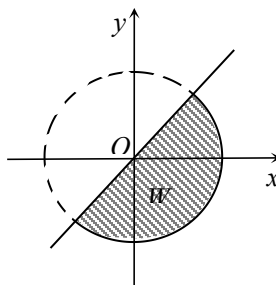
- (A) 4                      (B) 3                      (C)  $\frac{8}{3}$                       (D)  $\frac{4}{3}$

6. 设 $a, b, m$ 均为正数, 则“ $b > a$ ”是“ $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$ ”的

- (A) 充分而不必要条件                      (B) 必要而不充分条件  
(C) 充要条件                      (D) 既不充分也不必要条件

7. 如图, 阴影表示的平面区域 $W$ 是由曲线 $x-y=0$ ,  $x^2+y^2=2$ 所围成的. 若点 $P(x, y)$ 在 $W$ 内(含边界), 则 $z=4x+3y$ 的最大值和最小值分别为

- (A)  $5\sqrt{2}$ ,  $-7$   
(B)  $5\sqrt{2}$ ,  $-5\sqrt{2}$   
(C)  $7$ ,  $-5\sqrt{2}$   
(D)  $7$ ,  $-7$



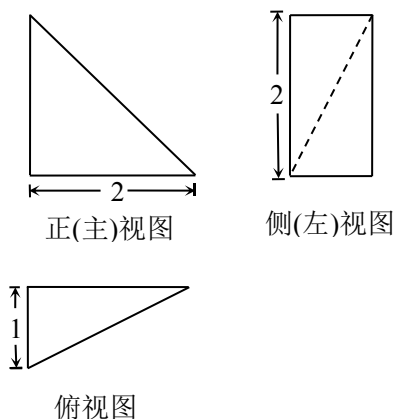
8. 如果把一个平面区域内两点间的距离的最大值称为此区域的直径, 那么曲线 $|y|=2-x^2$ 围成的平面区域的直径为

- (A) 2                      (B) 4  
(C)  $2\sqrt{2}$                       (D)  $2\sqrt{6}$

第II卷 (非选择题 共110分)

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

9. 设向量  $a, b$  满足  $|a|=2, |b|=3, \langle a, b \rangle = 60^\circ$ , 则  $a \cdot (a+b) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
10. 设  $F_1, F_2$  为双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的两个焦点, 若双曲线  $C$  的两个顶点恰好将线段  $F_1F_2$  三等分, 则双曲线  $C$  的离心率为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
11. 能说明“在  $\triangle ABC$  中, 若  $\sin 2A = \sin 2B$ , 则  $A = B$ ”为假命题的一组  $A, B$  的值是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
12. 某四棱锥的三视图如图所示, 那么该四棱锥的体积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .



13. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \ln(x+2), & x \geq -1, \\ -2x-4, & x < -1. \end{cases}$  当

$f(a) = -1$  时,  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ; 如果对于任意的  $x \in \mathbf{R}$  都有  $f(x) \geq b$ , 那么实数  $b$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 团体购买公园门票, 票价如下表:

购票人数	1~50	51~100	100 以上
门票价格	13 元/人	11 元/人	9 元/人

现某单位要组织其市场部和生产部的员工游览该公园, 这两个部门人数分别为  $a$  和  $b (a \geq b)$ , 若按部门作为团体, 选择两个不同的时间分别购票游览公园, 则共需支付门票费为 1290 元; 若两个部门合在一起作为一个团体, 同一时间购票游览公园, 则需支付门票费为 990 元, 那么这两个部门的人数  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ;  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = \sin x(\cos x - \sqrt{3} \sin x)$ .

(I) 求函数  $f(x)$  的最小正周期;

(II) 求函数  $f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}]$  上的最小值和最大值.

16. (本小题满分 13 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = n(n+1)+2$ , 其中  $n \in \mathbf{N}^*$ .

(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 若  $a_2, a_{k+2}, a_{3k+2}$  ( $k \in \mathbf{N}^*$ ) 为等比数列  $\{b_n\}$  的前三项, 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式.

17. (本小题满分 13 分)

为培养学生的阅读习惯, 某校开展了为期一年的“弘扬传统文化, 阅读经典名著”活动. 活动后, 为了解阅读情况, 学校统计了甲、乙两组各 10 名学生的阅读量 (单位: 本), 统计结果用茎叶图记录如下, 乙组记录中有一个数据模糊, 无法确认, 在图中以  $a$  表示.

甲		乙
8 6 2 1	0	1 2 4 4
7 2 2 1 0	1	2 3 6 6 $a$
	2	0

(I) 若甲组阅读量的平均值大于乙组阅读量的平均值, 求图中  $a$  的所有可能取值;

(II) 将甲、乙两组中阅读量超过 15 本的学生称为“阅读达人”. 设  $a=3$ , 现从所有的“阅读达人”里任取 2 人, 求至少有 1 人来自甲组的概率;

(III) 记甲组阅读量的方差为  $s_0^2$ . 若在甲组中增加一个阅读量为 10 的学生, 并记新得到的甲组阅读量的方差为  $s_1^2$ , 试比较  $s_0^2$ ,  $s_1^2$  的大小. (结论不要求证明)

(注:  $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$ , 其中  $\bar{x}$  为数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的平均数)

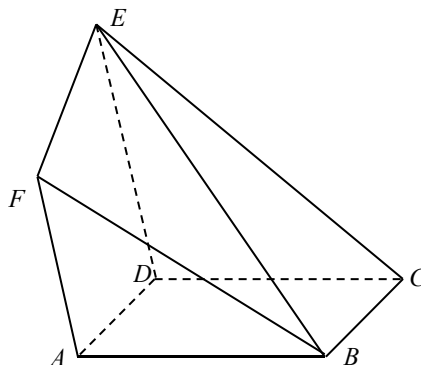
18. (本小题满分 14 分)

如图, 在多面体  $ABCDEF$  中, 底面  $ABCD$  为矩形, 侧面  $ADEF$  为梯形,  $AF \parallel DE$ ,  $DE \perp AD$ ,  $DC = DE$ .

(I) 求证:  $AD \perp CE$ ;

(II) 求证:  $BF \parallel$  平面  $CDE$ ;

(III) 判断线段  $BE$  上是否存在点  $Q$ , 使得平面  $ADQ \perp$  平面  $BCE$ ? 并说明理由.



19. (本小题满分 13 分)

设函数  $f(x) = me^x - x^2 + 3$ , 其中  $m \in \mathbf{R}$ .

(I) 当  $f(x)$  为偶函数时, 求函数  $h(x) = xf(x)$  的极值;

(II) 若函数  $f(x)$  在区间  $[-2, 4]$  上有两个零点, 求  $m$  的取值范围.

20. (本小题满分 14 分)

已知椭圆  $W: \frac{x^2}{4m} + \frac{y^2}{m} = 1$  的长轴长为 4, 左、右顶点分别为  $A, B$ , 经过点  $P(1, 0)$  的动直线与椭圆  $W$  相交于不同的两点  $C, D$  (不与点  $A, B$  重合).

(I) 求椭圆  $W$  的方程及离心率;

(II) 求四边形  $ACBD$  面积的最大值;

(III) 若直线  $CB$  与直线  $AD$  相交于点  $M$ , 判断点  $M$  是否位于一条定直线上? 若是, 写出该直线的方程. (结论不要求证明)

# 北京市西城区高三统一测试

## 数学（文科）参考答案及评分标准

2019.4

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

- |      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| 1. B | 2. D | 3. C | 4. D |
| 5. C | 6. C | 7. A | 8. B |

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

- |                   |                                   |   |
|-------------------|-----------------------------------|---|
| 9. 7              | 10. 3                             | 11. 答案不唯一，如 $A=60^\circ$ ， $B=30^\circ$ |
| 12. $\frac{4}{3}$ | 13. $-\frac{3}{2}; (-\infty, -2]$ | 14. 70; 40                              |

注：第 13 题第一问 2 分，第二问 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15. (本小题满分 13 分)

解：(I)  $f(x) = \sin x \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \cos 2x) \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= \sin(2x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

所以函数  $f(x)$  的最小正周期  $T = \pi$ . \dots\dots\dots 8 分

(II) 因为  $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$ , 所以  $-\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6}$ . \dots\dots\dots 9 分

所以当  $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ , 即  $x = \frac{\pi}{12}$  时,  $f(x)$  取得最大值  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

当  $2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ , 即  $x = -\frac{\pi}{3}$  时,  $f(x)$  取得最小值  $-\sqrt{3}$ . \dots\dots\dots 13 分

16. (本小题满分 13 分)

解：(I) 当  $n=1$  时,  $S_1 = a_1 = 4$ , \dots\dots\dots 2 分

当  $n \geq 2$  时, 由题意, 得  $S_n = n(n+1) + 2$ , ①  $S_{n-1} = (n-1)n + 2$ , ②

由 ① - ②, 得  $a_n = 2n$ , 其中  $n \geq 2$ . \dots\dots\dots 5 分

所以数列  $\{a_n\}$  的通项公式  $a_n = \begin{cases} 4, & n=1, \\ 2n, & n \geq 2. \end{cases}$  ..... 7分

(II) 由题意, 得  $a_{k+2}^2 = a_2 \cdot a_{3k+2}$ . ..... 9分

即  $[2(k+2)]^2 = 4 \times 2(3k+2)$ .

解得  $k=0$  (舍) 或  $k=2$ . ..... 10分

所以公比  $q = \frac{a_{k+2}}{a_2} = 2$ . ..... 11分

所以  $b_n = b_1 q^{n-1} = a_2 q^{n-1} = 2^{n+1}$ . ..... 13分

17. (本小题满分 13 分)

解: (I) 甲组 10 名学生阅读量的平均值为  $\frac{1+2+6+8+10+11+12+12+17+21}{10} = 10$ ,

乙组 10 名学生阅读量的平均值为  $\frac{1+2+4+4+12+13+16+16+(10+a)+20}{10} = \frac{98+a}{10}$ .

..... 2分

由题意, 得  $10 > \frac{98+a}{10}$ , 即  $a < 2$ . ..... 3分

故图中  $a$  的取值为 0 或 1. ..... 4分

(II) 记事件“从所有的“阅读达人”里任取 2 人, 至少有 1 人来自甲组”为  $M$ . ... 5分

由图可知, 甲组“阅读达人”有 2 人, 在此分别记为  $A_1, A_2$ ; 乙组“阅读达人”有 3 人, 在此分别记为  $B_1, B_2, B_3$ .

则从所有的“阅读达人”里任取 2 人, 所有可能结果有 10 种, 即  $(A_1, A_2), (A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, B_3), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_2, B_3), (B_1, B_2), (B_1, B_3), (B_2, B_3)$ . ..... 7分

而事件  $M$  的结果有 7 种, 它们是  $(A_1, A_2), (A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, B_3), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_2, B_3)$ , ..... 8分

所以  $P(M) = \frac{7}{10}$ .

即从所有的“阅读达人”里任取 2 人, 至少有 1 人来自甲组的概率为  $\frac{7}{10}$ . ... 10分

(III)  $s_0^2 > s_1^2$ . ..... 13分

18. (本小题满分 14 分)

解: (I) 由底面  $ABCD$  为矩形, 知  $AD \perp CD$ . ..... 1 分

又因为  $DE \perp AD$ ,  $DE \cap CD = D$ , ..... 2 分

所以  $AD \perp$  平面  $CDE$ . ..... 3 分

又因为  $CE \subset$  平面  $CDE$ ,

所以  $AD \perp CE$ . ..... 4 分

(II) 由底面  $ABCD$  为矩形, 知  $AB \parallel CD$ ,

又因为  $AB \not\subset$  平面  $CDE$ ,  $CD \subset$  平面  $CDE$ ,

所以  $AB \parallel$  平面  $CDE$ . ..... 6 分

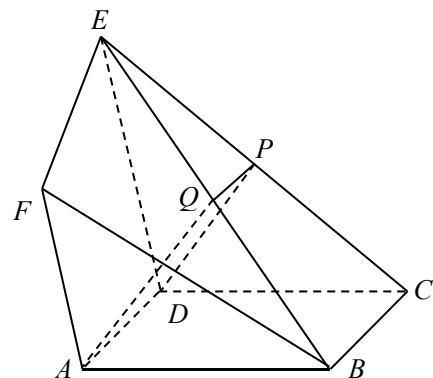
同理  $AF \parallel$  平面  $CDE$ ,

又因为  $AB \cap AF = A$ ,

所以平面  $ABF \parallel$  平面  $CDE$ . ..... 8 分

又因为  $BF \subset$  平面  $ABF$ ,

所以  $BF \parallel$  平面  $CDE$ . ..... 9 分



(III) 结论: 线段  $BE$  上存在点  $Q$  (即  $BE$  的中点), 使得平面  $ADQ \perp$  平面  $BCE$ . ... 10 分

证明如下:

取  $CE$  的中点  $P$ ,  $BE$  的中点  $Q$ , 连接  $AQ, DP, PQ$ , 则  $PQ \parallel BC$ .

由  $AD \parallel BC$ , 得  $PQ \parallel AD$ .

所以  $A, D, P, Q$  四点共面. .... 11 分

由 (I), 知  $AD \perp$  平面  $CDE$ ,

所以  $AD \perp DP$ , 故  $BC \perp DP$ .

在  $\triangle CDE$  中, 由  $DC = DE$ , 可得  $DP \perp CE$ .

又因为  $BC \cap CE = C$ ,

所以  $DP \perp$  平面  $BCE$ . ..... 13 分

又因为  $DP \subset$  平面  $ADPQ$

所以平面  $ADPQ \perp$  平面  $BCE$  (即平面  $ADQ \perp$  平面  $BCE$ ).

即线段  $BE$  上存在点  $Q$  (即  $BE$  中点), 使得平面  $ADQ \perp$  平面  $BCE$ . ..... 14 分



19. (本小题满分 13 分)

解: (I) 由函数  $f(x)$  是偶函数, 得  $f(-x) = f(x)$ ,

即  $me^{-x} - (-x)^2 + 3 = me^x - x^2 + 3$  对于任意实数  $x$  都成立,

所以  $m = 0$ . ..... 2 分

此时  $h(x) = xf(x) = -x^3 + 3x$ , 则  $h'(x) = -3x^2 + 3$ .

由  $h'(x) = 0$ , 解得  $x = \pm 1$ . ..... 3 分

当  $x$  变化时,  $h'(x)$  与  $h(x)$  的变化情况如下表所示:

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$h'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$h(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以  $h(x)$  在  $(-\infty, -1)$ ,  $(1, +\infty)$  上单调递减, 在  $(-1, 1)$  上单调递增. .... 5 分

所以  $h(x)$  有极小值  $h(-1) = -2$ ,  $h(x)$  有极大值  $h(1) = 2$ . .... 6 分

(II) 由  $f(x) = me^x - x^2 + 3 = 0$ , 得  $m = \frac{x^2 - 3}{e^x}$ .

所以“ $f(x)$  在区间  $[-2, 4]$  上有两个零点”等价于“直线  $y = m$  与曲线  $g(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$ ,  $x \in [-2, 4]$  有且只有两个公共点”. .... 8 分

对函数  $g(x)$  求导, 得  $g'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{e^x}$ . .... 9 分

由  $g'(x) = 0$ , 解得  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 3$ . .... 10 分

当  $x$  变化时,  $g'(x)$  与  $g(x)$  的变化情况如下表所示:

$x$	$(-2, -1)$	$-1$	$(-1, 3)$	$3$	$(3, 4)$
$g'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$g(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以  $g(x)$  在  $(-2, -1)$ ,  $(3, 4)$  上单调递减, 在  $(-1, 3)$  上单调递增. .... 11 分

又因为  $g(-2) = e^2$ ,  $g(-1) = -2e$ ,  $g(3) = \frac{6}{e^3} < g(-2)$ ,  $g(4) = \frac{13}{e^4} > g(-1)$ ,

所以当  $-2e < m < \frac{13}{e^4}$  或  $m = \frac{6}{e^3}$  时, 直线  $y = m$  与曲线  $g(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$ ,  $x \in [-2, 4]$  有且只有两个公共点.

即当  $-2e < m < \frac{13}{e^4}$  或  $m = \frac{6}{e^3}$  时, 函数  $f(x)$  在区间  $[-2, 4]$  上有两个零点. .... 13 分

20. (本小题满分 14 分)

解: (I) 由题意, 得  $a^2 = 4m = 4$ , 解得  $m = 1$ . ..... 1 分

所以椭圆  $W$  方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . ..... 2 分

故  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$ .

所以椭圆  $W$  的离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . ..... 4 分

(II) 当直线  $CD$  的斜率  $k$  不存在时, 由题意, 得  $CD$  的方程为  $x = 1$ ,

代入椭圆  $W$  的方程, 得  $C(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $D(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ,

又因为  $|AB| = 2a = 4$ ,  $AB \perp CD$ ,

所以四边形  $ACBD$  的面积  $S = \frac{1}{2} |AB| \times |CD| = 2\sqrt{3}$ . ..... 6 分

当直线  $CD$  的斜率  $k$  存在时, 设  $CD$  的方程为  $y = k(x - 1) (k \neq 0)$ ,  $C(x_1, y_1)$ ,  $D(x_2, y_2)$ ,

联立方程  $\begin{cases} y = k(x - 1), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$  消去  $y$ , 得  $(4k^2 + 1)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 4 = 0$ . ..... 7 分

由题意, 可知  $\Delta > 0$  恒成立, 则  $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2 + 1}$ ,  $x_1x_2 = \frac{4k^2 - 4}{4k^2 + 1}$ . ..... 8 分

四边形  $ACBD$  的面积  $S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} |AB| \times |y_1| + \frac{1}{2} |AB| \times |y_2|$  ..... 9 分

$$= \frac{1}{2} |AB| \times |y_1 - y_2| = 2 |k(x_1 - x_2)|$$

$$= 2\sqrt{k^2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} = 8\sqrt{\frac{k^2(3k^2 + 1)}{(4k^2 + 1)^2}},$$

设  $4k^2 + 1 = t$ , 则四边形  $ACBD$  的面积  $S = 2\sqrt{-\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 3}$ ,  $\frac{1}{t} \in (0, 1)$ ,

所以  $S = 2\sqrt{-(\frac{1}{t} + 1)^2 + 4} < 2\sqrt{3}$ .

综上, 四边形  $ACBD$  面积的最大值为  $2\sqrt{3}$ . ..... 11 分

(III) 结论: 点  $M$  在一条定直线上, 且该直线的方程为  $x = 4$ . ..... 14 分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注