数学参考答案

一、选择题

1，B【解析】由题意得 $A=\{0,1\}$ $B=\{x\mid 0<x+2<10\}=\{x\mid -2<x<8\}$，所以 $A\cap B=\{0,1\}$.

2. C【解析】设 $z=a+bi(a,b\in R)$，由题意得 $(a-5)^2+b^2=(a-1)^2+b^2=a^2+(b+1)^2$，解得 $a=3$，$b=-3$，所以 $|z|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$.

3. B【解析】由题意得 $3(1-2\sin^2\alpha)-\sin\alpha=2$，解得 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$ 或 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$. 又 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\alpha\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

所以 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，故 ACD 错误、B 正确.

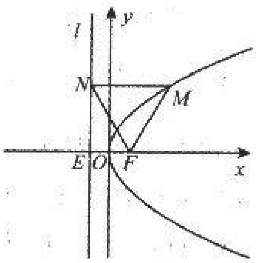
4. D【解析】设该高阶等差数列为 $\{a_n\}$，则 $\{a_n\}$ 的前 7 项分别为 1，2，4，7，11，16，22. 令 $b_n=a_{n+1}-a_n$，则数列 $\{b_n\}$ 为 1，2，3，4，5，6，…，所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，所以 $b_n=n$，即 $a_{n+1}-a_n=n$，故

$a_{100}=(a_{100}-a_{99})+(a_{99}-a_{98})+$

$(a_{98}-a_{97})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=(99+98+97+\cdots+1)+1=\dfrac{99\times(99+1)}{2}+1=$

4951.

5. A【解析】由题意得抛物线 C 的焦点 F 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，准线 l 的方程为 $x=-\dfrac{1}{2}$，设准线 l 与 x 轴的交点为 E 如图，由题知 $MN\perp l$. 由抛物线的定义知 $|MN|=|MF|$. 又 $|NF|=|MN|$，所以 ΔMNF 是等边三角形，因为 $MN\parallel OF$，所以 $\angle EFN=\angle MNF=60°$，所以 $|NF|=2|EF|=2p=2$，所以 ΔMNF 的面积为 $\dfrac{1}{2}|NF|^2\sin 60°=\sqrt{3}$.



6. C【解析】由题意得 $ab^5=\frac{4a}{5}$，即 $b^5=\frac{4}{5}$，所以 $b=\sqrt[5]{\frac{4}{5}}$，令 $ab^t=\frac{a}{4}$，则 $b^t=\frac{1}{4}$，即 $(\sqrt[5]{\frac{4}{5}})^t=\frac{1}{4}$，即 $t\lg\sqrt[5]{\frac{4}{5}}=\lg\frac{1}{4}$，可得 $\frac{1}{5}t(3\lg 2-1)=-2\lg 2$，故 $t=\frac{10\lg 2}{1-3\lg 2}\approx\frac{3}{0.1}=30$.

7. C【解析】由题意得从 2，3，4，5，6，7，8，9 中随机取两个数有 $C_8^2=28$种不同的结果，其中一个数比 m 大，一个数比 m 小的不同结果有 $(m-2)(9-m)$ 种，所以 $\frac{(m-2)(9-m)}{28}=\frac{5}{14}$，整理得 $m^2-11m+28=0$，解得 $m=4$ 或 $m=7$．当 $m=4$ 时，数据中的 [illegible] 分位数是第 3 个数，则 [illegible]，解得 [illegible]，故所有选项都不满足；当 $m=7$ 时，数据中的 p 分位数是第 6 个数，则 [illegible]，解得 $62.5\le p<75$，故 ABD 不满足、C 满足．

8. A【解析】$f(x)$ 的定义域为 $(-2,+\infty)$，$f'(x)=1-\frac{1}{x+2}=\frac{x+1}{x+2}$，当 $-2<x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)_{min}=f(-1)=0$，所以 $x=-1$ 为方程 $f(x)=0$ 的唯一实根，即 $x_1=-1$，故 $|x_1-x_2|\le 1$，即 $|-1-x_2|\le 1$，解得 $-2\le x_2\le 0$．因为 x_2 是 $g(x)=x^2-2ax+4a+4$ 的零点，所以方程 $x^2-2ax+4a+4=0$ 在区间 $[-2,0]$ 上有实根，即 $(2x-4)a=x^2+4$ 在区间 $[-2,0]$ 上有实根，即 $2a=\frac{x^2+4}{x-2}$ 在区间 $[-2,0]$ 上有实根．令 $g(x)=\frac{x^2+4}{x-2}$，$x\in[-2,0]$，则 $g(x)=\frac{x^2+4}{x-2}=\frac{(x^2-4)+8}{x-2}=x+2+\frac{8}{x-2}=(x-2)+\frac{8}{x-2}+4$．设 $t=x-2(-4\le t\le -2)$，则 $h(t)=t+\frac{8}{t}+4$，易知 $h(t)$ 在区间 $(-4,-2\sqrt{2})$ 上单调递增，

在区间 $(-2\sqrt{2},-2)$ 上单调递减．又 $h(-4)=-2$ ，$h(-2)=-2$ ，所以 $h(t)_{min}=-2$ ，$h(t)_{max}=4-4\sqrt{2}$ ，所以 $-2\le 2a\le 4-4\sqrt{2}$ ，即 $-1\le a\le 2-2\sqrt{2}$ ，故实数 a 的最小值是-1．

二、选择题

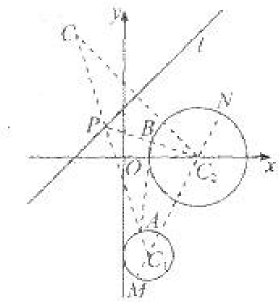
9． ABD【解析】由题意得 $a+b=(1+1,0+2\sqrt{3})=(2,2\sqrt{3})$ ，所以 $|a+b|=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}$

=4，故 A 正确；$(a+b)\cdot a=2\times1+2\sqrt{3}\times0=2$，故 B 正确；因为 $\cos\langle a,a+b\rangle=\frac{a\cdot(a+b)}{|a||a+b|}=\frac{2}{1\times4}=\frac{1}{2}$，且 $0\le\langle a,a+b\rangle\le\pi$ ，所以 $\langle a,a+b\rangle=\frac{\pi}{3}$ ，故 C 错误；向量 $a+b$ 在向量 a 上的投影向量为 $\left[\frac{a\cdot(a+b)}{|a|}\right]\frac{a}{|a|}=2a$ ，故 D 正确．

10． ABC【解析】因为 [illegible] 所以 [illegible]，所以 [illegible]，又 [illegible]，所以 $\cos\varphi=\frac{3}{2}$（舍去）或 $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$，因为 [illegible]，所以 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ ，所以 [illegible]，当 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，[illegible]，所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称，故 A 正确；当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$ ，所以 $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称，故 B 正确；当 $-\frac{3\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{2\pi}{3}\le-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ，$k\in z$ ，即 $-\frac{5\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{12}+k\pi$ ，$k\in Z$ ，时，$g(x)$ 单调递减，则当 $k=0$ 时，$g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递减，所以 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调递减区间为 $\left[0,\frac{\pi}{12}\right]$ ，故 C 正确；因为 $f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)=-2\cos 2x\ne g(x)$ ，故 D 错误．

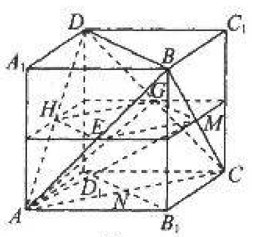
11．AC【解析】因为圆 $C_1:x^2+y^2-2x+8y+16=0$ 的标准方程为 $(x-1)^2+(y+4)^2=1$ ，所以其圆心为 $C_1(1,-4)$ ，半径为 $r_1=1$ ，因为圆 $C_2:x^2+y^2-6x+5=0$ 的标准方程为

$(x-3)^2+y^2=4$，所以其圆心为$C_2(3,0)$，半径为$r_2=2$，设点C_2关于直线 对称的点为$C(a,b)$，则$\begin{cases}\dfrac{b}{a-3}=-1,\\ \dfrac{a+3}{2}-\dfrac{b}{2}+2=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-2,\\ b=5,\end{cases}$ 即$C(-2,5)$．如图，连接CC_1交直线 于点P，连接PC_2，此时C,P,C_1三点共线，$|PC_2|+|PC_1|$最小，则$|PA|+|PB|$最小，所以$(|PA|+|PB|)_{\min}=|PC_2|+|PC_1|-r_1-r_2=|CC_1|-r_1-r_2=3\sqrt{10}-3$，故 A 正确、B 错误；因为$|PA|-|PB|\le|AB|$，所以当$|AB|$取到最大值且点$P,A,B$共线时，$|PA|-|PB|$取到最大值．由图可知，$|AB|_{\max}=|MN|=|C_1C_2|+r_1+r_2=2\sqrt{5}+3$，所以$|PA|-|PB|$的最大值为$2\sqrt{5}+3$，故 C 正确，D 错误。

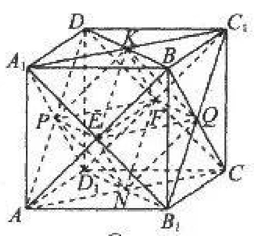


12．BCD【解析】在棱长为 2 的正方体$AB_1CD_1-A_1BC_1D$中，知正四面体$ABCD$的棱长为$2\sqrt{2}$，故球心O即为该正方体的中心，连接B_1D_1，设$AC\cap B_1D_1=N$，因为$BB_1 /\!/ DD_1$，$BB_1=DD_1$，所以四边形BB_1D_1D为平行四边形，所以$BD /\!/ B_1D_1$．又$BD /\!/$平面α $B_1D_1\not\subset$平面α，所以$B_1D_1 /\!/$平面α．因为$AC /\!/$平面α，$AC\cap B_1D_1=N$，AC，$B_1D_1\subset$平面AB_1CD_1，所以平面$\alpha /\!/$平面AB_1CD_1．对于 A，如图①，因为平面$\alpha /\!/$平面AB_1CD_1，平面$\alpha\cap$平面$ABC=EM$，平面$AB_1CD_1\cap$平面$ABC=AC$，所以$EM /\!/ AC$，则$\dfrac{EM}{AC}=\dfrac{BE}{AB}=1-\lambda$，即$EM=(1-\lambda)AC=2\sqrt{2}(1-\lambda)$同理可得$GH /\!/ AC$，$GH=2\sqrt{2}(1-\lambda)$，$HE /\!/ GM /\!/ BD$，$HE=GM=2\sqrt{2}\lambda$，所以四边形$EMGH$的周长$L=FM+GM+GH+HE=$

$4\sqrt{2}$，故 A 错误；对于 B，如图①，由 A 可知 $HE \parallel GM \parallel BD$，$HE = GM = 2\sqrt{2}\lambda$，且 $EM \parallel GH \parallel AC$，$EM = GH = 2\sqrt{2}(1-\lambda)$，因为四边形 AB_1CD_1 为正方形，所以 $AC \perp B_1D_1$，所以四边形 $EMGH$ 为矩形，所以点 A 到平面 α 的距离 $d = \lambda AA_1 = 2\lambda$，故四棱锥 $A-EMGH$ 的体积 V 与 λ 之间的关系式为 $V(\lambda) = \frac{1}{3} \times 2\lambda \times 2\sqrt{2}\lambda \times 2\sqrt{2}(1-\lambda) = \frac{16}{3}(\lambda^2 - \lambda^3)$，则 $V'(\lambda) = \frac{16}{3}\lambda(2-3\lambda)$．因为 $0<\lambda<1$，所以当 $0<\lambda<\frac{2}{3}$ 时，$V'(\lambda)>0$，$V(\lambda)$ 单调递增；当 $\frac{2}{3}<\lambda<1$ 时，$V'(\lambda)<0$，$V(\lambda)$ 单调递减，所以当 $\lambda = \frac{2}{3}$ 时，$V(\lambda)$ 取到最大值 $\frac{64}{81}$，故四棱锥 $A-EMGH$ 体积的最大值为 $\frac{64}{81}$，故 B 正确；对于 C，正四面体 $ABCD$ 的外接球即为正方体 $AB_1CD_1-A_1BC_1D$ 的外接球，其半径 $R = \sqrt{3}$．设平面 α 截球 O 所得截面的圆心为 O_1，半径为 r，当 $\lambda = \frac{1}{4}$ 时，$OO_1 = \frac{1}{2}$．因为 $OO_1^2 + r^2 = R^2$，则 $r = \sqrt{R^2 - OO_1^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$，所以平面 α 截球 O 所得截面的周长为 $2\pi r = \sqrt{11}\pi$，故 C 正确；对于 D，如图②，将正四面体 $ABCD$ 绕 EF 旋转 90°后得到正四面体 $A_1B_1C_1D_1$，设 $A_1D_1 \cap AD = P$，$A_1C_1 \cap BD = K$，$B_1C_1 \cap BC = Q$，$B_1D_1 \cap AC = N$，连接 $KP, KE, KF, KQ, NP, NE, NF, NQ$，因为 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$，所以 E, F, P, Q, K, N 分别为各面的中心，两个正四面体的公共部分为几何体 $KPEQFN$ 为两个相同的正四棱锥组合而成，又 $EP = \sqrt{2}$，正四棱锥 $K-PEQF$ 的高为 $\frac{1}{2}AA_1 = 1$，所以所求公共部分的体积 $V = 2V_{四棱锥\,K-PEQF} = 2 \times \frac{1}{3} \times 1 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \frac{4}{3}$，故 D 正确．



①



②

11

三、填空题

13．$-\frac{10}{3}$ 【解析】由题知命题的否定“$\forall x\in[1,3], x^2+ax+1\le 0$”是真命题，令 $f(x)=x^2+ax+1(x\in[1,3])$，则 $\begin{cases}f(1)=a+2\le 0,\\ f(3)=3a+10\le 0,\end{cases}$ 解得 $a\le -\frac{10}{3}$，故实数 a 的最大值为 $-\frac{10}{3}$.

14．①②【解析】由题意知 $f(x)+f(-x)=0$，又 $f(2-x)=f(x)$，所以 $f(2-x)+f(-x)=0$，所以 $f(2+x)+f(x)=0$，即 $f(x+2)=-f(x)$，则 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，且 $f(x+4)=-f(-x)$，即 $f(x+4)+f(-x)=0$，所以 $f(x)$ 的图象关于点(2，0)对称，故①正确，是真命题；因为 [illegible] 为奇函数，且在区间 [illegible] 上是增函数，所以 [illegible] 在区间 [illegible] 上是增函数，又 [illegible]，所以 [illegible] 的图象关于直线 [illegible] 对称，所以 [illegible] 在区间 [illegible] 上是减函数，故②正确，是真命题；而 [illegible]，故③错误，是假命题.

15．1 或 2 [illegible] 【解析】若待检测的总人数为 8，经过 4 轮共 7 次检测，则第 1 轮需检测 1 次，第 2 轮需检测 2 次，每次检查的均是 4 人组；第 3 轮需检测 2 次，每次检查的是有感染者的 4 人组均分的两组，每组 2 人；第 4 轮需检测 2 次，每次检查的是有感染者的 2 人组分成的两组，每组 1 人，则感染者人数为 1 或 2．当待检测的总人数为 $2^m(m\ge 3)$，且假设其中有不超过 2 名感染者时，若没有感染者，则只需 1 次检测即可；若有 1 名感染者，则需 $1+2\times m=(2m+1)$ 次检测；若有 2 名感染者，且检测次数最多，则第 2 轮检测时，2 名感染者不位于同一组，两个待检测组的样本数均为 2^{m-1}、，每组 1 名感染者，此时每组需 $1+2(m-1)=(2m-1)$ 次检测，则两组共需 $2(2m-1)=(4m-2)$ 次检测，故有 2 名感染者，且检测次数最多，共需 $4m-2+1=(4m-1)$ 次检测．因为 $m\ge 3$，所以 $4m-1>2m+1$，所以 n 的最大值为 $4m-1$.

16．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 【解析】对椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，设 $P(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$，$\Delta PF_1F_2$ 的内切圆半径为 ，则 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 2c\times b|\sin\theta|=bc|\sin\theta|=\frac{1}{2}(2c+2a)\cdot r$，故 $r=\frac{bc|\sin\theta|}{a+c}=|n|$，由题意知 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，

则 $|PF_1|=\sqrt{(a\cos\theta+c)^2+(b\sin\theta)^2}=\sqrt{a^2+2a\cos\theta+(c\cos\theta)^2}=a+c\cos\theta$，同理可得 $|PF_2|=a-c\cos\theta$．又由内切圆的性质得 $(c-m)-(m+c)=|PF_2|-|PF_1|=(a-c\cos\theta)-(a+c\cos\theta)$，所以 $m=c\cos\theta$．由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，得 $\frac{m^2}{c^2}+\frac{n^2}{\frac{(bc)^2}{(a+c)^2}}=1$，即 $\frac{m^2}{c^2}+\frac{n^2}{\frac{a-c}{a+c}\cdot c^2}=1$．当 $a=2$，$c=1$ 时，$m^2+3n^2=1(n\neq 0)$．

设 $m=\cos\alpha$，$n=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha\neq 0$，则 $m+n=\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$，

所以 $m+n$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

四、解答题

17．(1)证明：由题意得 ，因为 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-1}{\frac{1}{a_n}-1}=\frac{\frac{a_n+3}{4a_n}-1}{\frac{1}{a_n}-1}=\frac{3(1-a_n)}{4(1-a_n)}=\frac{3}{4}$，（3 分）

且 $b_1=\frac{1}{a_1}-1=\frac{1}{4}$，（4 分）

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{4}$，公比为 $\frac{3}{4}$ 的等比数列．（5 分）

(2)解：由(1)得 $\left(\frac{1}{a_1}-1\right)+\left(\frac{1}{a_2}-1\right)+\left(\frac{1}{a_3}-1\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-1\right)=\frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{4}}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$，即 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}-n=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$，

所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=n+1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$．（8 分）

13

因为 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}>140$ ，所以 $n+1-\left(\frac{3}{4}\right)^n>140$.

又 $f(n)=n+1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 随着 n 的增大而增大，所以 $n\geq 140$ ，故满足条件的最小正整数

n 为140 .　　(10 分)

18. (1)证明：在 ΔABD 中，由正弦定理得 $\frac{\sin\angle BAD}{BD}=\frac{\sin B}{AD}$，则 $\sin\angle BAD=\frac{BD\cdot\sin B}{AD}$；

在 ΔACD 中，由正弦定理得 $\frac{\sin\angle CAD}{CD}=\frac{\sin C}{AD}$，则 $\sin\angle CAD=\frac{CD\cdot\sin C}{AD}$，（4 分）

所　以 $\frac{\sin\angle BAD}{b}+\frac{\sin\angle CAD}{c}=\frac{BD\cdot\sin B}{AD\cdot b}+\frac{CD\cdot\sin C}{AD\cdot c}=\frac{BD\cdot\sin\angle BAC}{AD\cdot a}=$

$\frac{CD\cdot\sin\angle BAC}{AD\cdot a}=\frac{\frac{1}{2}(BD+CD)}{AD\cdot a}=\frac{\frac{1}{2}a}{AD\cdot a}=\frac{1}{2AD}=\frac{3}{2a}$，（5 分）

所以 $AD=\frac{1}{3}a$.　　　　（6 分）

(2)解：由 $CD=2BD$ ，得 $CD=\frac{2}{3}a$ ，$BD=\frac{1}{3}a$. 又 $AD=\frac{1}{3}a$，所以在 ΔACD 和 ΔABD 中，由余弦定理得

$$\cos\angle ADC=\frac{\left(\frac{1}{3}a\right)^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2-b^2}{2\cdot\frac{1}{3}a\cdot\frac{2}{3}a}，\quad\cos\angle ADB=\frac{\left(\frac{1}{3}a\right)^2+\left(\frac{1}{3}a\right)^2-c^2}{2\cdot\frac{1}{3}a\cdot\frac{1}{3}a}.$$

由 $\cos\angle ADC+\cos\angle ADB=0$ ，得

$$\frac{\left(\frac{1}{3}a\right)^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2-b^2}{2\times\frac{1}{3}a\times\frac{2}{3}a}+\frac{\left(\frac{1}{3}a\right)^2+\left(\frac{1}{3}a\right)^2-c^2}{2\times\frac{1}{3}a\times\frac{1}{3}a}=0,$$

整理得 $a^2-b^2=2c^2$.　　　　（9 分）

又 $\angle BAC=\frac{5\pi}{6}$ ，所以在 ΔABC 中，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{5\pi}{6}=b^2+$

$c^2+\sqrt{3}bc$.

联立 $\begin{cases}a^2-b^2=2c^2,\\a^2=b^2+c^2+\sqrt{3}bc\end{cases}$ 得 $\begin{cases}c=\sqrt{3}b,\\a=\sqrt{7}b,\end{cases}$

故 $\cos\angle ADC = \dfrac{\left(\frac{1}{3}a\right)^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2-b^2}{2\times\frac{1}{3}a\times\frac{2}{3}a} = \dfrac{\frac{5}{9}\times 7b^2-b^2}{\frac{4}{9}\times 7b^2} = \dfrac{13}{14}$.　(12 分)

19．解：(1)第一场比赛，业余队安排乙与甲进行比赛，则业余队获胜的概率为

$P_1 = \left(1-\frac{3}{4}\right)\times(1-p)+\frac{3}{4}\times(1-p)\times\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{16}-\frac{7}{16}p$；　（2 分）

第一场比赛，业余队安排丙与甲进行比赛，则业余队获胜的概率为

$P_2 = (1-p)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+p\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times(1-p) = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}p^2$.（4 分）

当 $\frac{1}{2}<p<\frac{3}{4}$ 时， $P_1-P_2 = \frac{1}{4}p^2-\frac{7}{16}p+\frac{3}{16} = \frac{1}{16}(4p^2-7p+3) = \frac{1}{16}(p-1)$

$(4p-3)>0$，　（5 分）

即 $P_1 > P_2$，所以第一场业余队应该安排乙与甲进行比赛．　（6 分）

(2)由题意知 X 的可能取值为 8 或 16．

由(1)知第一场业余队应该安排乙与甲进行比赛，此时业余队获胜的概率 $P_1 = \frac{7}{16}-\frac{7}{16}p$

专业队获胜的概率 $P_3 = \frac{3}{4}\times p+\left(1-\frac{3}{4}\right)\times p\times\frac{3}{4} = \frac{15}{16}p$，

所以非平局的概率 $P(X=16) = P_1+P_3 = \frac{7}{16}+\frac{1}{2}p$（9 分）

平局的概率 $P(X=8) = 1-P(X=16) = -\frac{1}{2}p+\frac{9}{16}$，

所以 $E(X) = 16\times\left(\frac{7}{16}+\frac{1}{2}p\right)+8\times\left(-\frac{1}{2}p+\frac{9}{16}\right) = \frac{23}{2}+4p$.　(11 分)

因为 $\frac{1}{2}<p<\frac{3}{4}$，所以 $\frac{27}{2}<E(X)<\frac{29}{2}$，

即 X 的数学期望 $E(X)$ 的取值范围是 $\left(\frac{27}{2},\frac{29}{2}\right)$.　(12 分)

20．(1)**证明**：由题意得 $PO\perp$ 平面 ABD．

因为 D 是切线 CE 与圆 O 的切点，

所以 $CF\subset$ 平面 ABD，且 $OD\perp CE$，则 $PO\perp CE$．（2 分）

又 $PO\cap OD=O$，$PO,OD\subset$ 平面 POD，

所以 $CE\perp$ 平面 POD .

又 $CE\subset$ 平面 PDE ，

所以平面 $PDE\perp$ 平面 POD （4 分）

(2)**解**：如图，作 $Ox\parallel AE$ ，则 Ox ,OC ,OP 两两垂直．以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OP}$ 别为 x,y,z 轴的正方向，建立空间直角坐标系．

由题意知 $PO=2$ ，$CO=2R$ ，$OD=R$ ，$CD=\sqrt{3}R$ ，

又 $\Delta ACE\backsim\Delta DCO$ ，所以 $\dfrac{CD}{CA}=\dfrac{CO}{CE}=\dfrac{OD}{EA}$ ，则 $EA=CD=ED=\sqrt{3}R$ ，

所以 $P(0,0,2)$ ，$D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}R,\dfrac{1}{2}R,0\right)$ ，$E(\sqrt{3}R,-R,0)$ ，$B(0,R,0)$ ，

则 $\overrightarrow{PD}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}R,\dfrac{1}{2}R,-2\right)$ ，$\overrightarrow{PB}=(0,R,-2)$ ，$\overrightarrow{PE}=(\sqrt{3}R,-R,-2)$.　　（6 分）

设平面 PBD 的法向量为 $m=(x,y,z)$ ，

则 $\begin{cases} m\cdot\overrightarrow{PD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}Rx+\dfrac{1}{2}Ry-2z=0,\\ m\cdot\overrightarrow{PB}=Ry-2z=0.\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}$ ，则 $y=3$ ，$z=\dfrac{3}{2}R$ ，得平面 PBD 的一个法向量为 $m=\left(\sqrt{3},3,\dfrac{3}{2}R\right)$.

又直线 PE 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{105}}{35}$ ，

所以 $|\cos<m,\overrightarrow{PE}>|=\dfrac{|m\cdot\overrightarrow{PE}|}{|m||\overrightarrow{PE}|}=\dfrac{3R}{\sqrt{12+\dfrac{9}{4}R^2}\times\sqrt{4+4R^2}}=\dfrac{\sqrt{105}}{35}$ ，

解得 $R=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $R=2$.　　（9 分）

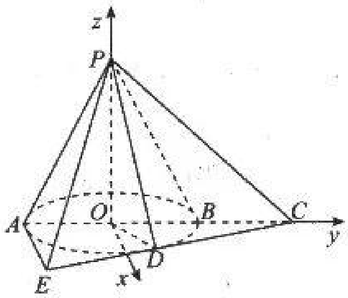
由题意知 $AC=\dfrac{3}{2}OC$ ，C 为直线 AC 与平面 PDE 的交点，所以点 A 到平面 PDE 的距离为点 O 到平面 PDF 的距离的 $\dfrac{3}{2}$ 倍.

又平面 $PDE\perp$ 平面 POD ，平面 $PDE\cap$ 平面 $POD=PD$ ，所以点 O 到平面 PDE 的距离即为点 O 到直线 PD 的距离.

在 $Rt\Delta POD$ 中，$PO=2$ ，$OD=R$ ，

所以点 O 到直线 PD 的距离为 $\dfrac{2R}{\sqrt{4+R^2}}$，则点 A 到平面 PDE 的距离为 $\dfrac{3R}{\sqrt{4+R^2}}$，

故点 A 到平面 PDE 的距离为 $\dfrac{3}{2}$ 或 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$． (12 分)



21．**解**：(1)由题知 $c=2$，且 $2a=\sqrt{(3+2)^2+(\sqrt{2}-0)^2}-\sqrt{(3-2)^2+(\sqrt{2}-0)^2}=2\sqrt{3}$，

（2 分）

所以 $a=\sqrt{3}$，所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=1$．

故 Γ 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$． （4 分）

(2)**法一**：设 $A(x_1,y_1)$，则 $B(-x_1,-y_1)$，直线 FA 的方程为

$x=my-2\left(其中 m=\dfrac{x_1+2}{y_1}\right)$，

直线 FB 的方程为 $x=ny-2\left(其中 n=\dfrac{x_1-2}{y_1}\right)$．

设 $C(x_C,y_C)$，$D(x_D,y_D)$，

联立 $\begin{cases} x=my-2, \\ \dfrac{x^2}{3}-y^2=1 \end{cases}$，得 $(m^2-3)y^2-4my+1=0$，（6 分）

则 $\Delta>0$，得 $y_1y_C=\dfrac{1}{m^2-3}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{x_1+2}{y_1}\right)^2-3}$，$y_C=\dfrac{y_1}{x_1^2+4x_1+4-3y_1^2}$．

又 $x_1^2-3y_1^2=3$，所以 $y_C=\dfrac{y_1}{7+4x_1}$，

则 $x_C=\frac{y_1}{7+4x_1}\cdot\frac{x_1+2}{y_1}-2=\frac{-12-7x_1}{7+4x_1}$.

同理可得 $y_D=\frac{-y_1}{7-4x_1}$，$x_D=\frac{-12+7x_1}{7-4x_1}$.　　（9 分）

因为直线 CD 经过点 $N(0,-1)$，

所以 C,D,N 三点共线，即 $\overrightarrow{CN}\,/\!/\,\overrightarrow{DN}$，

则 $x_D(y_C+1)=x_C(y_D+1)$，

所以 $\frac{-12+7x_1}{7-4x_1}\cdot\left(\frac{y_1}{7+4x_1}+1\right)=\frac{-12-7x_1}{7+4x_1}\cdot\left(\frac{-y_1}{7-4x_1}+1\right)$，

化简得 $(-12+7x_1)(y_1+7+4x_1)=(-12-7x_1)\cdot(-y_1+7-4x_1)$，

整理得 [illegible]，故 $k=\frac{y_1}{[illegible]}=\frac{1}{12}$.　　(12 分)

法二：设 [illegible]，$C(x_2,y_2)$，[illegible]，

则 [illegible]，

直线 [illegible] 的方程为 $x=my-2$（其中 $m=\frac{x_1+2}{y_1}$），

直线 FB 的方程为 $x=ny_1-2\left(\text{其中 } n=\frac{x_1-2}{y_1}\right)$.

联立 $\begin{cases}x=my-2,\\ \frac{x^2}{3}-y^2=1,\end{cases}$ 得 $(m^2-3)y^2-4my+1=0$，

则 $\Delta>0$，所以 $y_1y_C=\frac{1}{m^2-3}=\frac{1}{\left(\frac{x_1+2}{y_1}\right)^2-3}$，

则 $y_C=\frac{y_1}{x_1^2+4x_1+4-3y_1^2}$　（8 分）

又 $x_1^2-3y_1^2=3$，所以 $y_C=\frac{y_1}{7+4x_1}$，

同理可得 $y_D=\frac{-y_1}{7-4x_1}$.

设直线CD 的方程为$x=t(y+1)$，

联立$\begin{cases} x=t(y+1), \\ \dfrac{x^2}{3}-y^2=1, \end{cases}$ 得$(t^2-3)y^2+2t^2y+t^2-3=0$，

则$\Delta=12(2t^2-3)>0$，$y_Cy_D=1$，　　　(10 分)

即$\dfrac{y_1}{7+4x_1}\cdot\dfrac{-y_1}{7-4x_1}=1$，化简得$y_1^2=16x_1^2-49$.

又$x_1^2-3y_1^2=3$，解得$x_1^2=\dfrac{144}{47}$，$y_1^2=\dfrac{1}{47}$.

故$k=\sqrt{\dfrac{y_1^2}{x_1^2}}=\dfrac{1}{12}$.　　　(12 分)

22．解：(1)当$a=2$时，$f(x)=e^x+x\sin x+\cos x-2x-2$，

则$f'(x)=e^x+x\cos x-2$，

所以[illegible].（2 分）

又[illegible]，所以曲线[illegible]在点[illegible]处的切线方程为[illegible].（4 分）

(2) $f'(x)=e^x+x\cos x-a$，

令$h(x)=f'(x)(x\ge 0)$，则$h'(x)=e^x+\cos x-x\sin x$.

令$u(x)=e^x-1-x(x\ge 0)$，则$u'(x)=e^x-1\ge 0$，

所以$u(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，

则$u(x)\ge u(0)=0$，即$e^x-(x+1)\ge 0$.

当$x\ge 0$时，$\sin x\le 1$，则$-x\sin x\ge -x$.

又$\cos x\ge -1$，所以$\cos x-x\sin x\ge -(x+1)$，

所以$e^x+\cos x-x\sin x\ge e^x-(x+1)\ge 0$，

即$h'(x)\ge 0$，　　　（6 分）

则$h(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，即$f'(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，

所以 $f'(x)\geq f'(0)=1-a$．　（7 分）

①当 $1-a\geq 0$，即 $a\leq 1$ 时，$f'(x)\geq f'(0)\geq 0$，$f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)\geq f(0)=0$，符合题意；　（8 分）

②当 $1-a<0$，即 $a>1$ 时，$f'(a)\pm e^{a}+a\cos a-a\geq e^{a}-2a$．

令 $g(a)=e^{a}-2a(a>1)$，

则 $g'(a)=e^{a}-2>e-2>0$，

所以 $g(a)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

则 $g(a)>g(1)=e-2>0$，故 $f'(a)>0$．

又 $f'(0)<0$，所以 $\exists x_0\in(0,a)$，使得 $f'(x_0)=0$．

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递减，此时 $f(x)<f(0)=0$

不符合题意．

综上，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$．　(12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。