

长郡、雅礼、一中、附中联合编审名校卷
2021届高三月考试卷九(全国卷)
数学(文科)参考答案

一、选择题(本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求。)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	B	A	B	B	C	C	D	D	B	D

5. B 【解析】第 1 杯饮品好评率与差评率的差值为 $0.87-0.13=0.74$ 。

第 2 杯饮品好评率与差评率的差值为 $0.52-0.48=0.04$ 。

第 3 杯饮品好评率与差评率的差值为 $0.78-0.22=0.56$ 。

第 4 杯饮品好评率与差评率的差值为 $0.55-0.45=0.1$ 。

第 5 杯饮品好评率与差评率的差值为 $0.98-0.02=0.96$ 。

第 6 杯饮品好评率与差评率的差值为 $0.70-0.30=0.4$ 。

其中较小的差值为第 2 杯与第 4 杯,故选 B。

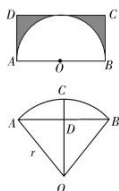
6. B 【解析】如图,依题意可知所求概率为图中阴影部分面积与长方形的面积比,即所求

$$\text{概率 } P = \frac{S_{\text{阴影}}}{S_{\text{长方形}}} = \frac{\frac{2-\pi}{2}}{2} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

7. C 【解析】如图所示,弓所在弧 AB 长为 $l = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$ 米,则其对应的圆心角

$$\angle AOB = \alpha = \frac{5\pi}{8} = \frac{2\pi}{3}.$$

则两手之间的距离为 $AB = 2r \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \times \frac{15}{16} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{16}$ 米,故选 C。



12. D 【解析】函数 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) + t (\omega > 0)$,由 $2|PQ| = |QR| = \frac{2\pi}{3}$,解得 $|PQ| = \frac{\pi}{3}$ 。

$$\therefore T = |PQ| + |QR| = \pi, \therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2, \therefore f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) + t,$$

$$\text{当 } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ 时, } 2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}].$$

$$\therefore 2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) \in [-1, 2], \therefore f(x) \in [-1+t, 2+t],$$

由题意可得 $f(a) + f(b) > f(c)$ 对任意的 $a, b, c \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 恒成立,

$$\therefore (f(a) + f(b))_{\min} > (f(c))_{\max},$$

$$\therefore f(a) + f(b) \geq -1+t-1+t = -2+2t, f(c) \leq t+2,$$

$$\therefore -2+2t > t+2, \text{解得 } t > 4.$$

二、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 2 【解析】因为 $S_2=3, S_4=15, S_4-S_2=12$,所以 $\begin{cases} a_1+a_2=3, \\ a_3+a_4=12, \end{cases}$

两个方程左右两边分别相除,得 $q^2=4$,因为数列是正项等比数列,所以 $q=2$ 。

$$14. y^2=8x$$

文科数学参考答案一

15. $[\frac{4}{5}, \frac{8}{5}]$ 【解析】设点 $P(x_0, y_0)$,由题可设渐近线 $l_1: x-2y=0$,渐近线 $l_2: x+2y=0$,由点 P 到直线 l_1 的距离 $d_1 = \frac{|x_0-2y_0|}{\sqrt{5}}$,点 P 到直线 l_2 的距离 $d_2 = \frac{|x_0+2y_0|}{\sqrt{5}}$,有 $d_1 d_2 = \frac{|x_0^2-4y_0^2|}{5}$, $\frac{|x_0^2-4y_0^2|}{5} = \frac{|x_0+2y_0|}{\sqrt{5}} \cdot \frac{|x_0-2y_0|}{\sqrt{5}} = \frac{|x_0^2-4y_0^2|}{5}$,又 $\frac{x_0^2}{4} - y_0^2 = 1$,即 $x_0^2 - 4y_0^2 = 4$,则 $d_1 d_2 = \frac{4}{5}$,则 $d_2 = \frac{4}{5d_1}$,由 d_2 与 d_1 成反比,且 $d_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$,所以 $d_2 \in [\frac{4}{5}, \frac{8}{5}]$ 。

16. $\frac{4}{3} 4\sqrt{3}\pi$ 【解析】因为平面 $PQS \perp$ 平面 $QRS, QS \perp SR$,则 $SR \perp$ 平面 PQS ,从而 $SR \perp PQ$,因为 $PQ \perp PS$,则 $PQ \perp$ 平面 PRS ,从而 $PQ \perp PR$,所以 QR 是外接球的直径,在 $Rt\triangle QSR$ 中, $QR = \sqrt{QS^2 + SR^2} = 2\sqrt{3}$,则球半径 $R = \sqrt{3}$,所以外接球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\sqrt{3}\pi$,四面体 $PQRN$ 的体积为 $\frac{4}{3}$ 。

三、解答题:本大题共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22,23 题为选考题,考生根据要求作答。

17. 【解析】(1) 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ 。

$a_1=1$ 也适合 $a_n = 2^{n-1}$ 。

因此,数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n-1}$ 。 (4 分)

(2) $\because b_{n+1} - 2b_n = 8a_n = 2^{n+2}$,

等式两边同时除以 2^{n+1} 得, $\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{b_n}{2^n} = 2$,且 $\frac{b_1}{2} = 1$ 。

$\therefore$ 数列 $\{\frac{b_n}{2^n}\}$ 是以 1 为首项,以 2 为公差的等差数列,

$$\therefore \frac{b_n}{2^n} = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1,$$

$$\therefore b_n = (2n-1) \cdot 2^n. \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\therefore T_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2n-1) \cdot 2^n,$$

$$\text{得 } 2T_n = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + (2n-3) \cdot 2^n + (2n-1) \cdot 2^{n+1},$$

$$\text{两式相减得 } -T_n = 2^1 + 2 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + 2 \times 2^n - (2n-1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= 2 + \frac{2^3(1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1) \cdot 2^{n+1} = (3-2n) \cdot 2^{n+1} - 6,$$

$$\text{因此 } T_n = (2n-3) \cdot 2^{n+1} + 6. \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

18. 【解析】(1) 证明: $\because$ 底面 ABCD 是菱形, $\angle MNC = 60^\circ$, $\therefore AB = AD = AC = 2$,

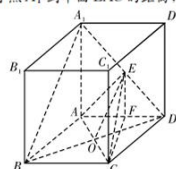
在 $\triangle AA_1B$ 中,由 $AA_1^2 + AB^2 = A_1B^2$ 知 $AA_1 \perp AB$ 。

同理, $AA_1 \perp AD$ 。

又 $AB \cap AD = A$, $\therefore AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$ 。 (5 分)

(2) 解: 设 AC 与 BD 交于点 O,点 E 为 A_1D 的中点,连接 OE,则 $OE \parallel A_1B$, $\therefore A_1B \parallel$ 平面 EAC。

直线 A_1B 与平面 EAC 之间的距离等于点 A_1 到平面 EAC 的距离,可转化为点 B 到平面 EAC 的距离,



过点 E 作 $EF \perp AD$ 于 F, $\because$ 点 E 为 A_1D 的中点, $\therefore EF \perp$ 平面 ABCD, F 为 AD 的中点。

文科数学参考答案二

连接 CF , 则 $CF = \sqrt{3}$,
在 $Rt\triangle EFC$ 中, $CE = 2$,
又 $AE = \sqrt{2}$, $AC = 2$,

$\therefore S_{\triangle AEC} = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $V_{A_1-EMC} = V_{B-EMC} = V_{E-BMC}$, 设 d 表示点 B 到平面 EAC 的距离, 则 $d = \frac{2\sqrt{21}}{7}$.

$\therefore$ 点 A_1 到平面 EAC 的距离为 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. (12 分)

19. 【解析】(1) 根据已知条件完成 2×2 列联表, 如下:

	网购迷	非网购迷	合计
年龄不超过 40 岁	20	15	65
年龄超过 40 岁	5	30	35
合计	25	75	100

计算 $K^2 = \frac{100 \times (20 \times 30 - 5 \times 15)^2}{25 \times 75 \times 65 \times 35} \approx 3.297$.

因为 $3.297 > 2.706$.

所以据此列联表判断, 能在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下, 认为网购迷与年龄不超过 40 岁有关. (6 分)

(2) 由频数分布直方图知, 网购迷共有 25 人, 现从网购迷中按分层抽样选 5 人代表, 记其中年龄超过 40 岁的 1 名市民为 A , 其余 4 名年龄不超过 40 岁的市民为 c, d, e, f , 现从 5 人中任取 2 人, 基本事件是 $Ac, Ad, Ae, Af, cd, ce, cf, de, df, ef$ 共有 10 种, 其中有市民年龄超过 40 岁的基本事件是 Ac, Ad, Ae, Af 共 4 种,

故所求的概率为 $P = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. (12 分)

20. 【解析】(1) 由题意, $f'(x) = a(1 + \ln x) - 2bx - a = a \ln x - 2bx$,

由 $f'(1) = -2b = -1$, 得 $b = \frac{1}{2}$, 又 $f(1) = -b - a = -\frac{3}{2}$, $\therefore a = 1$.

即 $a = 1, b = \frac{1}{2}$. (4 分)

(2) 当 $a \leq 0, b = \frac{1}{2}, x \in (1, e)$ 时, $f'(x) = a \ln x - x < 0$.

$f(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减. (6 分)

不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) > f(x_2)$, 原不等式即为 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1} < 3$.

即 $f(x_1) - f(x_2) < 3x_2 - 3x_1$, 即 $f(x_1) + 3x_1 < f(x_2) + 3x_2$.

令 $g(x) = f(x) + 3x$, 则 $g(x)$ 在 $(1, e)$ 上为单调增函数,

$\therefore$ 有 $g'(x) = f'(x) + 3 = a \ln x - x + 3 \geq 0$ 在 $(1, e)$ 上恒成立. (8 分)

即 $a \geq \frac{x-3}{\ln x}, x \in (1, e)$, 令 $h(x) = \frac{x-3}{\ln x}, x \in (1, e), h'(x) = \frac{\ln x + \frac{3}{x} - 1}{(\ln x)^2}$,

令 $t(x) = \ln x + \frac{3}{x} - 1, t'(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{x-3}{x^2} < 0$.

$\therefore t(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减, $t(x) > t(e) = \frac{3}{e}$,

则 $h'(x) > 0, h(x)$ 在 $(1, e)$ 上为单调增函数,

$\therefore h(x) < h(e) = e - 3$, 即 $a \geq e - 3$.

综上, $e - 3 \leq a \leq 0$. (12 分)

文科数学参考答案 - 3

21. 【解析】(1) 由题设知 $k_{AB} = \frac{3}{2}$, 设所求直线方程为: $y = kx$, 则 $k \cdot k_{AB} = -\frac{3}{4}$, 则 $k = -\frac{1}{2}$,

故共轭直径所在直线方程为: $y = -\frac{1}{2}x$.

联立椭圆与 $y = -\frac{1}{2}x$, 可得: $x^2 = 3, x = \pm\sqrt{3}$.

故端点坐标为 $(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 和 $(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. (4 分)

(2) 由题设知, l 不与 x 轴重合, 故设 $l: x = my - \sqrt{3}$.

联立方程: $\begin{cases} x = my - \sqrt{3} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow (3m^2 + 4)y^2 - 6\sqrt{3}my - 3 = 0$.

则 $y_1 + y_2 = \frac{6\sqrt{3}m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-3}{3m^2 + 4}, x_1 x_2 = \frac{12 - 12m^2}{3m^2 + 4}$.

$S = \frac{\sqrt{3}}{2} |y_1 - y_2| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3m^2 + 1}}{3m^2 + 4} = \frac{6\sqrt{3m^2 + 1}}{3m^2 + 4} = \frac{6}{\sqrt{3m^2 + 1} + \sqrt{3m^2 + 1}} \leq \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

当且仅当 $3m^2 + 1 = 3$, 即 $m^2 = \frac{2}{3}$ 时取等号.

此时 $k_{A_1 A_2} \cdot k_{B_1 B_2} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{-3}{12 - 12m^2} = -\frac{3}{4} = -\frac{b^2}{a^2}$, 故直径 $A_1 A_2$ 与直径 $B_1 B_2$ 共轭. (8 分)

(3) 法 1: 设点 $C(x_1, y_1), M(x_2, y_2)$, 则 $T(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$.

代入 $\vec{OP} = \lambda \vec{OT}$, 可得: $P(\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \lambda, \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \lambda)$.

若 P 在椭圆 E 的外部, 则有: $\frac{(\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \lambda)^2}{4} + \frac{(\frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \lambda)^2}{3} > 1$.

即 $\lambda^2 [3(x_1 + x_2)^2 + 4(y_1 + y_2)^2] > 48 \Rightarrow \lambda^2 [(3x_1^2 + 4y_1^2) + (3x_2^2 + 4y_2^2) + 6x_1 x_2 + 8y_1 y_2] > 48$.

又因为 C, M 均在椭圆 E 上, 则 $3x_1^2 + 4y_1^2 = 3x_2^2 + 4y_2^2 = 12$.

又 CD 和 MN 为椭圆 E 的一对共轭直径, 故 $k_{CD} \cdot k_{MN} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -\frac{3}{4}$, 即 $4y_1 y_2 + 3x_1 x_2 = 0$.

从而 $24\lambda^2 > 48$, 即 $\lambda^2 > 2$, 即 $\lambda > \sqrt{2}$, 或 $\lambda < -\sqrt{2}$. (12 分)

法 2: 设点 $C(x_1, y_1), M(x_2, y_2)$,

当 CD 不与坐标轴重合时, 设 $l_{CD}: y = kx$, 则 $l_{MN}: y = -\frac{3}{4k}x$.

联立 $\begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 = \frac{12}{3 + 4k^2}, y_1^2 = \frac{12k^2}{3 + 4k^2}$.

同理可得: $x_2^2 = \frac{16k^2}{3 + 4k^2}, y_2^2 = \frac{9}{3 + 4k^2}$.

由椭圆的对称性, 不妨设 C 在第一象限, 则 M 必在第二象限或第四象限,

则 $x_1 = \sqrt{\frac{12}{3 + 4k^2}}, y_1 = \sqrt{\frac{12k^2}{3 + 4k^2}}$,

若 M 在第二象限, 则 $x_2 = -\sqrt{\frac{16k^2}{3 + 4k^2}}, y_2 = \sqrt{\frac{9}{3 + 4k^2}}$,

从而 $T(\frac{\sqrt{\frac{12}{3 + 4k^2}} - \sqrt{\frac{16k^2}{3 + 4k^2}}}{2}, \frac{\sqrt{\frac{12k^2}{3 + 4k^2}} + \sqrt{\frac{9}{3 + 4k^2}}}{2})$.

文科数学参考答案 - 4

$$\text{则 } P \left(\frac{\sqrt{\frac{12}{3+4k^2}} - \sqrt{\frac{16k^2}{3+4k^2}}}{2} \lambda, \frac{\sqrt{\frac{12k^2}{3+4k^2}} + \sqrt{\frac{9}{3+4k^2}}}{2} \lambda \right).$$

$$\text{又 } P \text{ 在椭圆外, 则 } 3 \left(\frac{\sqrt{\frac{12}{3+4k^2}} - \sqrt{\frac{16k^2}{3+4k^2}}}{2} \lambda \right)^2 + 4 \left(\frac{\sqrt{\frac{12k^2}{3+4k^2}} + \sqrt{\frac{9}{3+4k^2}}}{2} \lambda \right)^2 > 12.$$

化简可得: $\lambda^2 > 2$, 即 $\lambda > \sqrt{2}$, 或 $\lambda < -\sqrt{2}$.

若 M 在第四象限, 同理可得 $\lambda^2 > 2$, 即 $\lambda > \sqrt{2}$, 或 $\lambda < -\sqrt{2}$.

当 CD 与 x 轴垂直或重合时, 由椭圆的对称性, 不妨取 $C(2, 0)$, $M(0, \sqrt{3})$, 则 $P\left(\lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)$.

又 P 在椭圆外, 则 $3\lambda^2 + 4 \cdot \frac{3}{4}\lambda^2 > 12 \Rightarrow \lambda^2 > 2$, 即 $\lambda > \sqrt{2}$, 或 $\lambda < -\sqrt{2}$.

综上: $\lambda > \sqrt{2}$, 或 $\lambda < -\sqrt{2}$ (12 分)

22. 【解析】(1) 由曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \cos^2 \theta = \sin \theta$.

两边同乘以 ρ , 得 $\rho^2 \cos^2 \theta = \rho \sin \theta$.

故曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2 = y$ (5 分)

(2) 射线 l 的极坐标方程为 $\theta = \alpha$, $\frac{\pi}{6} < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$.

把射线 l 的极坐标方程代入曲线 C_1 的极坐标方程得 $|OA| = \rho = 4 \cos \alpha$.

把射线 l 的极坐标方程代入曲线 C_2 的极坐标方程得 $|OB| = \rho = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$.

$$\therefore |OA| \cdot |OB| = 4 \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = 4 \tan \alpha.$$

$$\because \frac{\pi}{6} < \alpha \leq \frac{\pi}{4}, \therefore \tan \alpha \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right].$$

$\therefore |OA| \cdot |OB|$ 的取值范围是 $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 4 \right]$ (10 分)

23. 【解析】(1) 因为 $|x+1| + |x-2| \geq |(x+1) - (x-2)| = 3$.

当且仅当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, 等号成立.

所以 $f(x)$ 的最小值等于 3, 即 $a=3$ (5 分)

(2) 证明: 由 (1) 知 $p+q=3$.

又因为 p, q 是正实数.

$$\text{所以 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \left(\frac{p}{3} + \frac{q}{3} \right) = \frac{1}{3} + \frac{q}{3p} + \frac{p}{3q} + \frac{1}{3} \geq \frac{2}{3} + 2\sqrt{\frac{q}{3p} \cdot \frac{p}{3q}} = \frac{4}{3}.$$

当且仅当 $p=q=\frac{3}{2}$ 时, 等号成立. (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

关注后获取更多资料:

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》