

## 武昌区 2023 届高三年级 5 月质量检测

### 数学

本试卷共 6 页，共 22 题。满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上，并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目，在规定的位置贴好条形码。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2x - 3 > 0\}$ ， $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 4^x - 2^x > 0\}$ ，则  $A \cap B =$  ( )。
 

A.  $(-\infty, 0)$       B.  $(0, +\infty)$       C.  $(3, +\infty)$       D.  $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$
2. 已知复数  $z$  满足  $(1-i)\bar{z} = 2$ ，则  $|z^2| =$  ( )。
 

A. 1      B.  $\sqrt{2}$       C. 2      D.  $2\sqrt{2}$
3. 已知不重合的平面  $\alpha$ ， $\beta$  及不重合的直线  $m$ ， $n$ ，则 ( )。
 

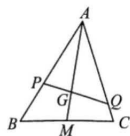
A. 若  $m \parallel \alpha$ ， $\alpha \parallel \beta$ ，则  $m \parallel \beta$

B. 若  $m \perp n$ ， $m \perp \alpha$ ， $n \perp \beta$ ，则  $\alpha \perp \beta$

C. 若  $m \parallel n$ ， $m \parallel \alpha$ ， $m \parallel \beta$ ，则  $\alpha \parallel \beta$

D. 若  $m \parallel \alpha$ ， $\alpha \parallel \beta$ ， $n \subset \beta$ ，则  $m \parallel n$
4. 把 1, 2, 3, 4, 5 这 5 个数排成一列，则满足先增后减（例如：1, 3, 5, 4, 2）的数列的个数是 ( )。
 

A. 6      B. 10      C. 14      D. 20
5. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $M$  为线段  $BC$  的中点， $G$  为线段  $AM$  上一点， $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$ ，过点  $G$  的直线分别交直线  $AB$ ， $AC$  于  $P$ ， $Q$  两点， $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AP}$  ( $x > 0$ )， $\overrightarrow{AC} = y\overrightarrow{AQ}$  ( $y > 0$ )，则  $\frac{4}{x} + \frac{1}{y+1}$  的最小值为 ( )。



- A.  $\frac{3}{4}$                       B.  $\frac{9}{4}$                       C. 3                      D. 9

6. 已知  $P(B)=0.4$ ,  $P(B|A)=0.8$ ,  $P(B|\bar{A})=0.3$ , 则  $P(A)=$  ( ).

- A.  $\frac{3}{4}$                       B.  $\frac{3}{8}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $\frac{1}{5}$

7. 已知  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$  的左, 右焦点, 直线  $l$  过点  $F_2$ , 且与双曲线右支交于  $A, B$  两点,  $O$  为坐标原点,  $\triangle AF_1F_2, \triangle BF_1F_2$  的内切圆的圆心分别为  $O_1, O_2$ , 则  $\triangle OO_1O_2$  面积的取值范围是 ( ).

- A.  $\left(2, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$                       B.  $\left[2, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

- C.  $\left[2, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$                       D.  $\left[2, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

8. 设  $a=1+\sin 0.1$ ,  $b=e^{0.1}$ ,  $c=1.01^{10}$ ,  $d=\frac{10\pi+3}{10\pi}$ , 则  $a, b, c, d$  间的大小关系为 ( ).

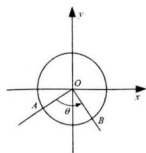
- A.  $b > c > d > a$                       B.  $b > c > a > d$   
C.  $c > b > d > a$                       D.  $b > a > c > d$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知实数数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 下列说法正确的是 ( ).

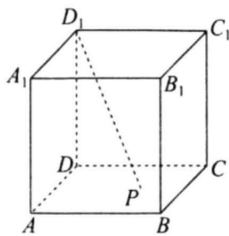
- A. 若数列  $\{a_n\}$  为等差数列, 则  $a_1 + a_3 + a_8 = 2a_6$  恒成立  
B. 若数列  $\{a_n\}$  为等差数列, 则  $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6, \dots$  为等差数列  
C. 若数列  $\{a_n\}$  为等比数列, 且  $a_3 = 7, S_3 = 21$ , 则  $a_4 = -\frac{7}{2}$   
D. 若数列  $\{a_n\}$  为等比数列, 则  $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6, \dots$  为等比数列

10. 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $O$  是坐标原点, 角  $\alpha$  的终边  $OA$  与圆心在坐标原点, 半径为 2 的圆交于点  $A(m, -1)(m < 0)$ , 射线  $OA$  绕点  $O$  按逆时针方向旋转  $\theta$  弧度后交该圆于点  $B$ , 记点  $B$  的纵坐标  $y$  关于  $\theta$  的函数为  $y = f(\theta)$ . 则下列说法正确的是 ( ).



- A.  $f(\theta) = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$
- B. 函数  $y = f(\theta)$  的图象关于直线  $\theta = \frac{\pi}{3}$  对称
- C. 函数  $y = f(\theta)$  的单调递增区间为  $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$
- D. 若  $f(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ , 则  $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{39}}{13}$

11. 如图, 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2,  $P$  为底面  $ABCD$  内 (包括边界) 的动点, 则下列结论正确的是 ( ).



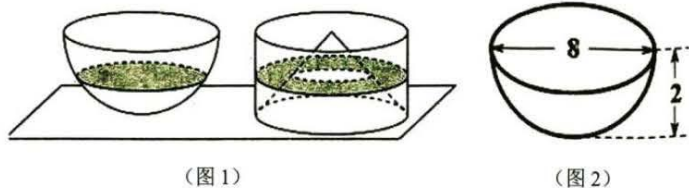
- A. 三棱锥  $B_1 - C_1D_1P$  的体积为定值
  - B. 存在点  $P$ , 使得  $D_1P \perp AC_1$
  - C. 若  $D_1P \perp B_1D$ , 则  $P$  点在正方形底面  $ABCD$  内的运动轨迹长为  $\sqrt{2}$
  - D. 若点  $P$  是  $AD$  的中点, 点  $Q$  是  $BB_1$  的中点, 过  $P, Q$  作平面  $\alpha \perp$  平面  $ACC_1A_1$ , 则平面  $\alpha$  截正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的截面面积为  $3\sqrt{3}$
12. 已知非常数函数  $f(x)$  及其导函数  $f'(x)$  的定义域均为  $\mathbf{R}$ , 若  $f(1-2x)$  为奇函数,  $f(2x-1)$  为偶函数, 则 ( ).
- A.  $f(0) = 0$
  - B.  $f(-2021) = -f(2023)$
  - C.  $f'(2x-1) = f'(2x+7)$
  - D.  $f'(-2021) = -f'(2023)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知点  $A(-2, 0)$ ,  $B(0, 2)$ , 动点  $M$  满足  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ , 则点  $M$  到直线  $y = x + 2$  的距离可以是 \_\_\_\_\_ . (写出一个符合题意的整数值)

14. 已知函数  $f(x) = \frac{1 + \sin x}{2 \cos x + \sin x}$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 则函数  $f(x)$  的最小值为\_\_\_\_\_.

15. 祖暅原理: “幂势既同, 则积不容异”。即: 夹在两个平行平面之间的两个几何体, 被平行于这两个平面的任意平面所截, 如果截得的两个截面的面积总相等, 那么这两个几何体的体积相等, 如图(1). 卡塔尔世界杯球形金碗, 它可以看成半球的一部分, 若金碗碗口的直径为 8, 高为 2, 其直观图如图(2)所示, 则利用祖暅原理可求得该球形金碗的体积为\_\_\_\_\_.



16. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 过点  $F$  的直线与  $C$  交于  $A, B$  两点,  $C$  在  $A$  处的切线与  $C$  的准线交于  $P$  点, 连接  $BP$ . 若  $|PF| = 3$ , 则  $\frac{1}{|AF|^2} + \frac{4}{|BF|^2}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

**四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

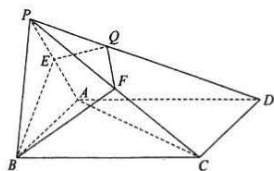
17. (10 分) 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\sin A = \frac{3}{5}$ ,  $\cos B = \frac{5}{13}$ .

- (1) 求  $\sin C$ ;
- (2) 若  $a = 13$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

18. (12 分) 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 已知  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = S_n + n$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 设单调递增等差数列  $\{b_n\}$  满足  $b_2 = 3$ , 且  $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + \frac{1}{2}b_3$  成等比数列.
  - (i) 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式;
  - (ii) 设  $T_n = \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + \dots + \frac{1}{b_n^2}$ , 试确定  $T_n$  与  $\frac{3}{4}$  的大小关系, 并给出证明.

19. (12 分) 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是平行四边形, 侧面  $PAB$  是等边三角形, 平面  $PAB \perp$  平面  $ABCD$ ,  $BC = 2AB$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ .



- (1) 证明:  $PB \perp AC$ ;

(2) 点  $Q$  在侧棱  $PD$  上,  $DQ = 2QP$ , 过  $B, Q$  两点作平面  $\alpha$ , 设平面  $\alpha$  与  $PA, PC$  分别交于点  $E, F$ ,

当直线  $AC \parallel \alpha$  时, 求二面角  $B-EQ-D$  的余弦值.

20. (12分) 某考生在做高考数学模拟题第 12 题时发现不会做. 已知该题有四个选项, 为多选题, 至少有两项正确, 至多有 3 个选项正确. 评分标准为: 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 选到错误选项得 0 分. 设此题正确答案为 2 个选项的概率为  $p_0$  ( $0 < p_0 < 1$ ). 已知该考生随机选择若干个 (至少一个).

(1) 若  $p_0 = \frac{1}{2}$ , 该考生随机选择 2 个选项, 求得分  $X$  的分布列及数学期望;

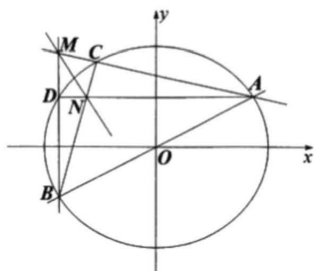
(2) 为使他此题得分数学期望最高, 请你帮他以下三种方案中选一种, 并说明理由.

方案一: 随机选择一个选项;

方案二: 随机选择两个选项;

方案三: 随机选择三个选项.

21. (12分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过点  $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ , 左焦点为  $F_1(-1, 0)$ .



(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设直线  $l: y = \frac{1}{2}x$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 点  $M$  为椭圆  $C$  外一点, 直线  $AM, BM$  分别与椭圆  $C$  交于点  $C, D$  (异于点  $A, B$ ), 直线  $AD, BC$  交于点  $N$ , 求证: 直线  $MN$  的斜率为定值.

22. (12分) 已知函数  $f(x) = ax + (a-1)\ln x + \frac{1}{x}$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 若关于  $x$  的方程  $f(x) = xe^x - \ln x + \frac{1}{x}$  有两个不相等的实数根  $x_1, x_2$ ,

(i) 求实数  $a$  的取值范围;

(ii) 求证:  $\frac{e^{x_1}}{x_2} + \frac{e^{x_2}}{x_1} > \frac{2a}{x_1 x_2}$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

