2023年4月高中毕业班第三次联合调研考试

数学(理科)参考答案及评分标准

1～12: AACB　BDCC　CACA

13. -4　14. $\frac{2}{3}$　15. 形如 $1-a^x(0<a<1)$ 的函数均可(其它符合题意的函数也可) 16. $\frac{3}{8}$

17. 解:方案一:选择条件①

(Ⅰ)由题意,当 $n=1$ 时,$a_1=1=S_1=1^2+p$,解得 $p=0$,则 $S_n=n^2, n\in N^*$. ………… 2分

当 $n\geqslant 2$ 时,由 $S_n=n^2$,得 $S_{n-1}=(n-1)^2$,

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1(n\geqslant 2)$, ………… 4分

经检验,$a_1=1$ 符合上式,

$\therefore a_n=2n-1\ (n\in N^*)$ ………… 6分

(Ⅱ)依题意,由 a_1,a_n,a_m 成等比数列,可得 $a_n^2=a_1a_m$,

即 $(2n-1)^2=1\times(2m-1)$, ………… 8分

化简,得 $m=2n^2-2n+1=2(n-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$, ………… 10分

$\because m,n$ 是大于1的正整数,且 $m>n$,

$\therefore$ 当 $n=2$ 时,m 有最小值5 . ………… 12分

方案二:选择条件②

(Ⅰ)依题意,由 $a_n=a_{n+1}-3$,可得 $a_{n+1}-a_n=3$, ………… 2分

故数列 $\{a_n\}$ 是以1为首项,3为公差的等差数列, ………… 4分

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=3n-2(n\in N^*)$. ………… 6分

(Ⅱ)依题意,由 a_1,a_n,a_m 成等比数列,可得 $a_n^2=a_1a_m$,

即 $(3n-2)^2=1\times(3m-2)$, ………… 8分

化简,得 $m=3n^2-4n+2=3(n-\frac{2}{3})^2+\frac{2}{3}$, ………… 10分

$\because m,n$ 是大于1的正整数,且 $m>n$,

$\therefore$ 当 $n=2$ 时,m 取到最小值6. ………… 12分

方案三:选择条件③

(Ⅰ)依题意,由 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$,可得 $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$,

故数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, ………… 2分

又 $\because a_1=1, a_6=a_1+5d=1+5d=11$,即 $d=2$, ………… 4分

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=2n-1(n\in N^*)$. ………… 6分

(Ⅱ)依题意,由 a_1,a_n,a_m 成等比数列,可得 $a_n^2=a_1a_m$,

即 $(2n-1)^2=1\times(2m-1)$, ………… 8分

化简,得 $m=2n^2-2n+1=2(n-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$, ………… 10分

$\because m,n$ 是大于1的正整数,且 $m>n$,

$\therefore$ 当 $n=2$ 时,m 有最小值5. ………… 12分

官方微信公众号:zizzsw　咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com　微信客服:zizzs2018

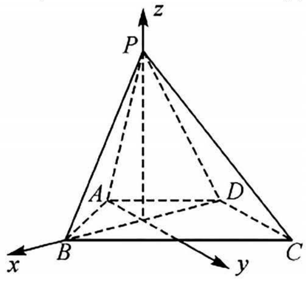
18. 解:(Ⅰ)连接BD,设BD的中点为O,连接OA,OP. ······························ 1分

因为$AB=AD$,所以$OA\perp BD$,因为$PB=PD$,所以$OP\perp BD$, ······················ 3分

又$OA\cap OP=O$,$OA\subset$平面OAP,$OP\subset$平面OAP,

所以$BD\perp$平面OAP, ································ 4分

因为$PA\subset$平面OAP,所以$BD\perp PA$; ··············· 5分



(Ⅱ)因为$\angle BAD=90^\circ$,所以$OA=OB$,又$PA=PB$,

所以$\triangle POA\cong\triangle POB$,所以$OP\perp OA$,

又$OA\cap BD=O$,$OA\subset$平面$ABCD$,$BD\subset$平面$ABCD$,

所以$OP\perp$平面$ABCD$. ··· 7分

如图,以O为原点,OB,OP所在直线分别为x轴、z轴建立空间直角坐标系, ··· 8分

则$A(0,-1,0)$,$B(1,0,0)$,$C(-1,2,0)$,$D(-1,0,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,

所以$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{DP}=(1,0,\sqrt{3})$, ······························· 9分

$\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$,设平面$PCD$的一个法向量为$\vec{n}=(x_0,y_0,z_0)$,

所以$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2y_0=0,\\ x_0+\sqrt{3}z_0=0,\end{cases}$取$x_0=\sqrt{3}$,则$\vec{n}=(\sqrt{3},0,-1)$, ········ 10分

设$\overrightarrow{BC}$与平面PCD所成的角为α,则$\sin\alpha=|\cos<\overrightarrow{BC},\vec{n}>|=|\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{4}}|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

则直线BC与平面PCD的夹角余弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. ································ 12分

19. 解:(Ⅰ)选择模型①,因为模型①的残差点比较均匀地落在水平的带状区域中,且模型①的带状区域比模型②的带状区域窄,所以模型①的拟合精度高,回归方程的预报精度高. ··· 3分

(Ⅱ)(i)剔除异常数据,即组号为3的数据,剩下数据的平均数为

$\bar{x}=\dfrac{1}{5}(7\times6-6)=7.2$,$\bar{y}=\dfrac{1}{5}(30\times6-31.8)=29.64$; ······················ 5分

$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\,\bar{y}=1464.24-6\times31.8-5\times7.2\times29.64=206.4$,

$\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2=364-6^2-5\times7.2^2=68.8$. ·· 7分

$\therefore\ \hat{b}=\dfrac{206.4}{68.8}=3$,$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\,\bar{x}=29.64-3\times7.2=8.04$.

$\therefore$所选模型的回归方程为$\hat{y}=3x+8.04$; ·································· 10分

(ii)若广告投入量$x=18$时,该模型收益的预报值是$3\times18+8.04=62.04$万元.

·· 12分

20. 解:(Ⅰ)由题意,笔尖到点F的距离与它到直线a的距离相等,可知笔尖留下的轨迹为以F为焦点,a为准线的抛物线,设其方程为$y^2=2px(p>0)$, ······················ 2分

则 $F(\frac{p}{2},0)$，由 $\angle FAP=30^0$，$\angle AFP=90^0$，$|PF|+|PA|=3$，可得 $|PF|=1$，可求出 $\angle FPA=60^0$，P 点坐标为 $(\frac{p}{2}-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，…………………………………………… 4分

代入抛物线方程，得：$(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=2p(\frac{p}{2}-\frac{1}{2})$，解得 $p=\frac{3}{2}$（$p=-\frac{1}{2}$ 舍去），…… 5分

$\therefore$ 轨迹 C 的方程为 $y^2=3x$． …………………………………………………… 6分

（Ⅱ）假设存在 λ，使得 $\overline{DM}=\lambda\overline{DN}$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $y=kx-3$，把直线 l 的方程代入 $y^2=3x$ 中，可得 $k^2x^2-(6k+3)x+9=0$，………………… 7分

$\Delta=(6k+3)^2-36k^2=36k+9>0$，当 $k\in(0,2)$ 时均成立．

由韦达定理知：$x_1+x_2=\frac{6k+3}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{9}{k^2}$，……………………………………… 8分

$\therefore \frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+2=\frac{(\frac{6k+3}{k^2})^2}{\frac{9}{k^2}}=\frac{1}{k^2}+\frac{4}{k}+4$，………………………… 9分

$\because \overline{DM}=\lambda\overline{DN}$，$\therefore x_1=\lambda x_2$，$\therefore \lambda=\frac{x_1}{x_2}$，$\therefore \lambda+\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{k^2}+\frac{4}{k}+2$，令 $t=\frac{1}{k}\in(\frac{1}{2},+\infty)$

令 $u=\frac{1}{k^2}+\frac{4}{k}+2=t^2+4t+2=(t+2)^2-2$，可求得 $u\in(\frac{17}{4},+\infty)$，……… 11分

$\therefore \lambda+\frac{1}{\lambda}>\frac{17}{4}$，由题意 $\lambda>0$，$\therefore \lambda^2-\frac{17}{4}\lambda+1>0$，解得 $\lambda\in(0,\frac{1}{4})\cup(4,+\infty)$．

故存在 $\lambda\in(0,\frac{1}{4})\cup(4,+\infty)$，使得 $\overline{DM}=\lambda\overline{DN}$． ……………………………… 12分

21．解：（Ⅰ）因为 $f'(x)=e^x-a+\cos x$，…………………………………………………………… 1分

由函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，得 $a\leqslant e^x+\cos x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立．

令 $h(x)=e^x+\cos x$，$x\in(0,+\infty)$，$h'(x)=e^x-\sin x$，

当 $x>0$ 时，$e^x>1$，所以 $h'(x)=e^x-\sin x>0$ 恒成立．

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

所以 $h(x)>h(0)=2$，……………………………………………………………………… 3分

所以 $a\leqslant 2$． ……………………………………………………………………………… 4分

（Ⅱ）由 $g(x)=(x-2)f(x)=(x-2)(e^x-ax+\sin x-1)$，得 $g(2)=0$，$g(0)=0$，

所以 $x=2$，$x=0$ 是 $g(x)=(x-2)f(x)$ 的两个零点． …………………………………… 6分

因为 $1\leqslant a<2$，由（1）知，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)>f(0)=0$，无零点．
………………………………………………………………………………………………… 7分

当 $x\in(-\infty,-\pi]$ 时，因为 $1\leqslant a<2$，所以 $-ax\geqslant\pi$，所以 $f(x)\geqslant e^x+\pi+\sin x-1>0$，无零点．
………………………………………………………………………………………………… 8分

当 $x\in(-\pi,0)$ 时，因为 $\sin x<0$，

设 $u(x)=f'(x)$，$u'(x)=e^x-\sin x>0$，

所以$f'(x)$在$(-\pi,0)$上单调递增,

又因为$f'(0)=2-a>0$,$f'(-\pi)=e^{-\pi}-1-a<0$,

所以存在唯一零点$x_0\in(-\pi,0)$,使得$f'(x_0)=0$.

当$x\in(-\pi,x_0)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$在$(-\pi,x_0)$上单调递减;

当$x\in(x_0,0)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(x_0,0)$上单调递增.

又因为$f(-\pi)=e^{-\pi}+a\pi-1>\pi-1>0$,$f(x_0)<f(0)=0$,

所以函数$f(x)$在$(-\pi,0)$上有且仅有1个零点. ………………………… 11分

综上,当$1\leqslant a<2$时,函数$g(x)=(x-2)f(x)$有且仅有3个零点. ……………… 12分

22. 解:(Ⅰ)由$\begin{cases}x=\dfrac{2\sqrt{t}}{1+t}\\ y=\dfrac{2}{1+t}\end{cases}$得$0\leqslant x\leqslant 1$且$y>0$及$\sqrt{t}=\dfrac{x}{y}$,代入$y=\dfrac{2}{1+t}$得$x^2+y^2-2y=0$,

……………………………………………………………………………… 3分

故曲线C的普通方程$x^2+(y-1)^2=1(0\leqslant x\leqslant 1$,且$y\neq 0)$ ……………………… 5分

(Ⅱ)由$\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+m=0$得$\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+m=0$

所以l的直角坐标方程为$x-y+m=0$,……………………………………… 7分

由$\dfrac{|m-1|}{\sqrt{2}}=1$得:$m=1\pm\sqrt{2}$, ………………………………………… 8分

因为$0\leqslant x\leqslant 1$且$y\neq 0$,知曲线C为半圆弧,所以直线l过点$(0,2)$时m最大,此时$m=2$

……………………………………………………………………………… 9分

所以$1-\sqrt{2}\leqslant m\leqslant 2$ ………………………………………………… 10分

23. 解:(Ⅰ)当$a=1$时,$f(x)=|x+1|+2|x-1|$, ……………………………………… 1分

当$x\leqslant -1$,$f(x)=-3x+1$,$f(x)_{\min}=f(-1)=4$; ………………………… 2分

当$-1<x<1$,$f(x)=-x+3$,$f(x)\in(2,4)$; ……………………………………… 3分

当$x\geqslant 1$,$f(x)=3x-1$,$f(x)_{\min}=f(1)=2$. ………………………………… 4分

$\therefore$当$a=1$时,$f(x)$的最小值为2. ……………………………………… 5分

(Ⅱ)$a>0$,$b>0$,当$1\leqslant x\leqslant 2$时,$|x+a|+2|x-1|>x^2-b+1$可化为$a+b>x^2-3x+3$.

……………………………………………………………………………… 7分

令$h(x)=x^2-3x+3$,$x\in[1,2]$,$h(x)_{\max}=h(1)=1$

$\therefore a+b>1$, ……………………………………………………………… 8分

$\therefore(a+\dfrac{1}{2})^2+(b+\dfrac{1}{2})^2=a^2+b^2+a+b+\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{(a+b)^2}{2}+a+b+\dfrac{1}{2}>2$. … 10分

注:第17—23题提供的解法供阅卷时评分参考,考生其它解法可相应给分。

4
官方微信公众号:zizzsw 咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com 微信客服:zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。