2023 丘成桐数学科学领军人才培养计划
数学一试试题

题 1. 对非负实数 x 令 $\pi(x)$ 为不超过 x 的素数个数，如 $\pi(1)=0$，$\pi(2)=1$，再令 $f(x)$ 为第 $\left[\frac{x}{4}\right]+1$ 个素数，求 $\int_0^{100}\left(\pi(x)+\frac{1}{4}f(x)\right)\mathrm{d}x$ 的值.

题 2. 若定义在 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数 $h(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开为 $c_kx^k+c_{k+1}x^{k+1}+\cdots$，其中 $c_k\neq 0$，则定义 $ord(h)=k$，若 $h(x)$ 在 $x=0$ 处泰勒展开系数均为 0，则定义 $ord(h)=\infty$，令 $S=\left\{f(x)\,\middle|\,f(x)\text{为定义在}\mathbb{R}\text{上的光滑函数，满足}f'(0)=1\right\}$，设

$$m=\min\left\{ord\left(f(g(x))-g(f(x))\right)\,|\,f(x)\in S,g(x)\in S\right\}$$

1. 求 m;
2. 对于 $f(x),g(x)\in S$，设 $f^{(i)}(0)=a_i$，$g^{(i)}(0)=b_i$，$i=2,3,\ldots$，求 $f(g(x))-g(f(x))$ 在 $x=0$ 处泰勒展开式中 x^m 的系数关于 a_i,b_i 的表达式.

题 3. 给定正整数 n，设 A,B 为 n 阶复方阵，满足 $AB+A=BA+B$，求证 $(A-B)^n=0$.

题 4. 对 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{Z}^3$，定义 $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$. 求所有的实数 α，使 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{x\in\mathbb{Z}^3,0<|\boldsymbol{x}|<\lambda}|\boldsymbol{x}|^\alpha$ 存在且有限.

题 5. 给定正整数 $m\geqslant 2$，$n\geqslant 2$ 以及实数 a,b，设有 $m+n$ 阶实方阵

$$A=\begin{bmatrix}J & \\ & K\end{bmatrix}$$

其中 J 为 m 阶方阵，K 为 n 阶方阵：

$$J=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{bmatrix}_{m\times m}, K=\begin{bmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

求线性空间 $\{X \in M_{m+n}(\mathbb{R})\,|AX = XA\}$ 的维数.

题 6. 给定整数 $n \geqslant 2$ 及实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，令 n 阶实矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{bmatrix}.$$

对线性空间 $V = \{x \in M_n(\mathbb{R})\,|X\}$，定义线性变换 $V \to V, F(X) = AXA$，求 $\mathrm{tr}(F)$ 和 $\det(F)$.

题 7. 给定整数 $n \geqslant 2$. 记 S_n 为 n 阶置换群. 考虑线性空间

$$V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\,|x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$

，对于 $\tau \in S_n$，定义线性变换 $\rho\tau : V \to V, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(n)})$. 记 $\chi(\tau) = \mathrm{tr}(\rho\tau)$.

1. 对 $\tau \in S_n$，求 $\chi(\tau)$ 所有可能取值.
2. 求 $\sum\limits_{\tau\in S_n} (\chi(\tau))^2$ 的值.

题 8. 设 $p \in [1, +\infty)$，对 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$，定义 $\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. 问：是否存在常数 C，使得对于 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\|\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{y}\|_p$，以及 $\forall \theta \in [0, 1]$，满足 $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p \leqslant C\|\theta\boldsymbol{x} - (1-\theta)\boldsymbol{y}\|_p$? 若存在，求出 C 的最小值，若不存在，说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：zizzsw。