成都七中高 2023 届高三下期入学考试数学试卷（理科）

参考答案

一、选择题： ACCAD； BCBDC； BC.

二、填空题：$\frac{8}{5}$；　　20；　　$f(x)=2x^2+1$(答案不唯一)；　　$\frac{\pi}{4}$.

三、解答题：

17.解：（1）设等差数列的公差为d，等比数列的公比为q，

由条件可知，$a_1+a_2+a_3=3a_2=15$，得$a_2=5$，$d=a_2-a_1=3$，所以$a_n=2+(n-1)\times 3=3n-1$

等比数列中，$b_1b_2b_3=b_2^3=64$，则$b_2=4$，$q=\frac{b_2}{b_1}=2$，所以$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$；　…………4 分

（2）$c_n=\begin{cases}3n-1, n\text{为奇数}\\ 2^{\frac{n}{2}}, n\text{为偶数}\end{cases}$，对数列$\{3n-1\}$，$n$为奇数时，$3(n+2)-1-(3n-1)=6$，

所以数列$\{c_n\}$的奇数项是首项为 2，公差为 6 的等差数列，

对数列$\left\{2^{\frac{n}{2}}\right\}$，$n$为偶数，$\frac{2^{\frac{n+2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}}=2$，所以数列$\{c_n\}$的偶数项是首项为 2，公比为 2 的等比数列，

所以数列$\{c_n\}$的前 20 项和为：$c_1+c_2+c_3+\dots+c_{20}=(c_1+c_3+\dots+c_{19})+(c_2+c_4+\dots+c_{20})$

$=\frac{10(2+56)}{2}+\frac{2(1-2^{10})}{1-2}=290+2^{11}-2=2^{11}+288=2336$.　…………12 分

18.解：（1）由题意可得第四组的人数为$100\times 0.16=16$，所以$m=100-14-36-16-4=30$，

$n=\frac{4}{100}=0.04$，又$[60,70)$内的频率为$\frac{30}{100}=0.3$，所以$x=\frac{0.3}{10}=0.03$，

$[90,100)$内的频率为0.04，所以$y=\frac{0.04}{10}=0.004$…………4 分

（2）由频率分布表可得该地区抽取"美食客"的概率为$0.16+0.04=0.2$，

由题意ξ可取$0,1,2,3$，且$\xi\sim B(3,\frac{1}{5})$

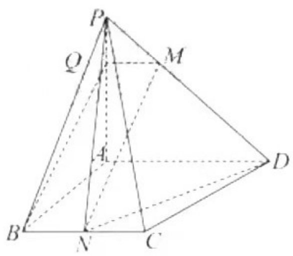
所以$P(\xi=0)=C_3^0\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$，$P(\xi=1)=C_3^1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{48}{125}$

$P(\xi=2)=C_3^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{12}{125}$，$P(\xi=3)=C_3^3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^0=\frac{1}{125}$

所以ξ的分布列为:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

$E(\xi)=3\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$.…………12 分

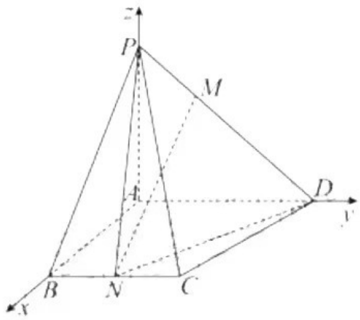


19.（1）取PA的一个靠近点P的三等分点Q，连接MQ,QB，因为$\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{MP}$，所以$MQ\,//\,AD$且$QM=\frac{1}{3}AD=1$.又因为$AD\,//\,BC$，且$BC=2$，点$N$为$BC$中点，

所以$BN\,//\,MQ$且$BN=MQ$，则四边形$MQBN$为平行四边形

所以$MN\,//\,BQ$，$MN\not\subset$平面PAB，$QB\subset$平面PAB，所以直线$MN\,//$平面PAB；…………5 分

（2）如图所示，以点A为坐标原点，以AB所在直线为x轴，以AD所在直线为y轴，以AP所在直线为z轴建立空间直角坐标系,则$B(2,0,0),C(2,2,0),D(0,3,0),P(0,0,3)$，又$N$为$BC$的中点，则$N(2,1,0)$,所以$\overrightarrow{PD}=(0,3,-3),\overrightarrow{CD}=(-2,1,0),\overrightarrow{PN}=(2,1,-3)$， $\overrightarrow{PC}=(2,2,-3)$，



设平面CPD的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{n_1}=3y-3z=0\\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{n_1}=-2x+y=0\end{cases}$,令$x=1$，则$\overrightarrow{n_1}=(1,2,2)$

设平面CPN的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(a,b,c)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{PC}\overrightarrow{n_2}=2a+2b-3c=0\\ \overrightarrow{PN}\overrightarrow{n_2}=2a+b-3c=0\end{cases}$,令$a=3$，则$\overrightarrow{n_2}=(3,0,2)$

所以$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|n_1|\,|n_2|}=\frac{3+4}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{9+4}}=\frac{7\sqrt{13}}{39}$

所以二面角 N-PC-D 的余弦值为 $-\frac{7\sqrt{13}}{39}$.…………12 分

20.解： （1）解：由题意，设椭圆半焦距为c，则$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，即$\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，得$b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$；

设$B(x_1,y_1),S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}a|y_1|$，由$|y_1|\le b$，所以$S_{\Delta OAB}$的最大值为$\frac{1}{2}ab$，将$b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$代入$\frac{1}{2}ab=\sqrt{3}$，

有$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}$，解得$a=2,b=\sqrt{3}$，所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；…………4 分

（2）解：设$C(x_2,y_2)$，因为点B为椭圆E上异于左、右顶点的动点，则直线BC不与x轴重合

设直线BC方程为$x=my+t$，与椭圆方程联立得$\left(3m^2+4\right)y^2+6mty+3t^2-12=0$，

$\Delta=36m^2t^2-12\left(3m^2+4\right)\left(t^2-4\right)>0$，可得$t^2<3m^2+4$，

由韦达定理可得$y_1+y_2=-\frac{6mt}{3m^2+4}$， $y_1y_2=\frac{3t^2-12}{3m^2+4}$

直线BA的方程为$y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，令$x=t$得点M纵坐标$y_M=\frac{y_1(t-2)}{x_1-2}$，

同理可得点N纵坐标$y_N=\frac{y_2(t-2)}{x_2-2}$

当O、A、M、N四点共圆，由相交弦定理可得$|PA||PO|=|PM|\cdot|PN|$，即$t(t-2)=|y_My_N|$，

$$y_My_N=\frac{y_1y_2(t-2)^2}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{y_1y_2(t-2)^2}{(my_1+t-2)(my_2+t-2)}=\frac{y_1y_2(t-2)^2}{m^2y_1y_2+m(t-2)(y_1+y_2)+(t-2)^2}$$

$$=\frac{3\left(t^2-4\right)(t-2)^2}{3m^2\left(t^2-4\right)-6m^2t(t-2)+\left(3m^2+4\right)(t-2)^2}=\frac{3(t+2)(t-2)^2}{3m^2(t+2)-6m^2t+\left(3m^2+4\right)(t-2)}$$

$=\frac{3(t+2)(t-2)^2}{4(t-2)}=\frac{3}{4}(t+2)(t-2)$,由$t>2$，故$t(t-2)=\frac{3}{4}(t+2)(t-2)$，解得$t=6$.…………12 分

21. 解：（1）函数$f(x)$定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=\frac{(2x-1)e^x}{2\sqrt{x}x}$,由$f'(x)=0$得$x=\frac{1}{2}$,

当$0<x<\frac{1}{2},f'(x)<0,f(x)$单减；当$x>\frac{1}{2},f'(x)>0,f(x)$单增；

函数$f(x)$的单调递减区间是$\left(0，\frac{1}{2}\right)$；单调递增区间是$\left(\frac{1}{2}，+\infty\right)$.…………3 分

（2）令$h(x)=\frac{e^x x^{-\frac{1}{2}}}{x+1}$，其定义域为$(0,+\infty)$　$h'(x)=\frac{(x-1)(2x+1)e^x}{2\sqrt{x}x(x+1)^2}$，

当$x\in(0,1),h'(x)<0,h(x)$单减，当$x\in(1,+\infty),h'(x)>0,h(x)$单增；

$h(x)_{min}=h(1)=\frac{e}{2}$，$h(x)$的最小值是$\frac{e}{2}$. …………7 分

（3）由（2）可知$\frac{e^x x^{-\frac{1}{2}}}{x+1}\geq\frac{e}{2}$，即$e^x x^{-\frac{1}{2}}\geq\frac{e}{2}x+\frac{e}{2}$，直线$y=\frac{e}{2}x+\frac{e}{2}$为函数$f(x)$的一条切线，

$f'(x)=\frac{(2x-1)e^x}{2\sqrt{x}x}$,取$x=\frac{1}{4},f'\left(\frac{1}{4}\right)=-2e^{\frac{1}{4}},f\left(\frac{1}{4}\right)=2e^{\frac{1}{4}}$

切线方程$y-2e^{\frac{1}{4}}=-2e^{\frac{1}{4}}(x-\frac{1}{4})$，即$y=-2e^{\frac{1}{4}}x+\frac{5}{2}e^{\frac{1}{4}}$（下证此切线在函数$f(x)$图像下方）

令$m(x)=e^x x^{-\frac{1}{2}}+2e^{\frac{1}{4}}x-\frac{5}{2}e^{\frac{1}{4}},m'(x)=\frac{(2x-1)e^x}{2\sqrt{x}x}+2e^{\frac{1}{4}}$,又令$\varphi(x)=\frac{(2x-1)e^x}{2\sqrt{x}x}+2e^{\frac{1}{4}}$

$\varphi'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{2}}\left(4x^2-4x+3\right)e^x>0$，则$m'(x)$单增，$m'\left(\frac{1}{4}\right)=0$，

$x<\frac{1}{4},m(x)$单减，$x>\frac{1}{4},m(x)$单增，$m(x)\geq m\left(\frac{1}{4}\right)$=0

所以函数$f(x)$图像夹在直线$y=-2e^{\frac{1}{4}}x+\frac{5}{2}e^{\frac{1}{4}}$和直线$y=\frac{e}{2}x+\frac{e}{2}$之间，

直线$y=m$与直线$y=-2e^{\frac{1}{4}}x+\frac{5}{2}e^{\frac{1}{4}}$的交点为（$\frac{5}{4}-\frac{e^4}{2}m$，$m$），

与直线$y=\frac{e}{2}x+\frac{e}{2}$的交点为（$\frac{2m}{e}-1,m$），

不妨设$x_1<x_2$,则$|AB|=|x_1-x_2|\leq\frac{2m}{e}-1-\frac{5}{4}+\frac{e^4}{2}m=(\frac{e^4}{2}+\frac{2}{e})m-\frac{9}{4}$. …………12 分

22． 解：（1）$\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$,则$x+y=1$，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

曲线C_1的极坐标方程为$\rho(\cos\theta+\sin\theta)=1$，
由$\rho=2(\cos\theta-\sin\theta)$，得$x^2+y^2=2x-2y$，即曲线$C_2$的直角坐标方程为$x^2+y^2-2x+2y=0$.
…………5 分

（2）由$\rho=2(\cos\theta-\sin\theta)$得$\cos\theta-\sin\theta=\frac{\rho}{2}$，由$\rho(\cos\theta+\sin\theta)=1$得$\cos\theta+\sin\theta=\frac{1}{\rho}$
①^2+②^{2}可得$\frac{\rho^2}{4}+\frac{1}{\rho^2}=2$，即$\rho^4-8\rho^2+4=0$，
设P，Q两点所对应的极径分别为ρ_1,ρ_2，则$(\rho_1\cdot\rho_2)^2=4$，即$|OP|\cdot|OQ|=\rho_1\cdot\rho_2=2$.…………10 分

23． 法一（1）解：当$x<-\frac{3}{2}$时，$f(x)=2|x+1|-|2x+3|=-2x-2+2x+3=1$
当$-\frac{3}{2}\leq x\leq-1$时，$f(x)=2|x+1|-|2x+3|=-2x-2-2x-3=-4x-5$
当$x>-1$时，$f(x)=2|x+1|-|2x+3|=2x+2-2x-3=-1$

所以 $f(x)=2|x+1|-|2x+3|=\begin{cases}1,x<-\dfrac{3}{2}\\-4x-5,-\dfrac{3}{2}\le x\le -1\\-1,x>-1\end{cases}$

因为当 $-\dfrac{3}{2}\le x\le -1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，$x<-\dfrac{3}{2}$ 或 $x>-1$ 时，函数为常函数，

所以，函数 $f(x)$ 的最大值为1，即 $m=1$.…………5 分

法二：由三角不等式可得 $f(x)=|2x+2|-|2x+3|\le|2x+2-2x-3|=1$

当 $x<-\frac{3}{2}$ 取等号，即 $m=1$.…………5 分

（2）解：因为 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{ab}}$，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{bc}}$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{ac}}$，所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\sqrt{\dfrac{1}{ab}}+\sqrt{\dfrac{1}{bc}}+\sqrt{\dfrac{1}{ac}}$，

因为，由（1）知 $m=1$，即 $abc=1$，所以 $\sqrt{\dfrac{1}{ab}}=\sqrt{c},\sqrt{\dfrac{1}{bc}}=\sqrt{a},\sqrt{\dfrac{1}{ac}}=\sqrt{b}$，

所以，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立，

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$，证毕. …………10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。