县(市、区)______ 班级______ 姓名______ 考生号______ 考场号______ 座位号______

装 订 线

绝密★启用前

天一大联考

2021—2022学年高中毕业班阶段性测试(三)

文科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

参考公式:设圆台的上下底面半径分别为 r,R,圆台的高为 h,则圆台的体积 $V=\frac{1}{3}\pi(R^2+r^2+Rr)h$.

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\{y|y=3\sin x-1\}$,$B=\{y|y\geqslant-1\}$,则 $A\cap(\complement_{\mathrm{R}}B)=$

A. $\{y|-1<y\leqslant2\}$　　B. $\{y|-4\leqslant y<-1\}$

C. $\{y|-1<y\leqslant4\}$　　D. $\{y|-2\leqslant y<-1\}$

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中,首项 $a_1=1$,前5项和 $S_5=25$,则 $a_7=$

A. 15　　B. 14　　C. 13　　D. 12

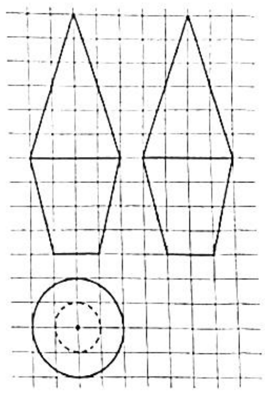
3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,1)$,$\boldsymbol{b}=(2,\lambda)(\lambda\in\mathrm{R})$,若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$

A. 5　　B. $5\sqrt{2}$　　C. $5\sqrt{3}$　　D. 10

4. 已知 $m,n\in(0,+\infty)$,若 $m+n=2$,则 $\frac{m}{4-2m}+\frac{2n}{2-n}$ 的最小值为

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. 4

5. 中世纪是骑兵的黄金时代,其中最具有代表性的是拜占庭重骑兵,他们的主要武器是长矛,如图所示,粗线为一款长矛的矛头模型的三视图,图中小正方形的边长均为1,则该模型的体积为



A. $\frac{50}{3}\pi$　　B. 17π

C. $\frac{52}{3}\pi$　　D. 18π

6. 已知 $a\in\mathrm{R}$,则"$|a|\geqslant4$"是"直线 $l:x-2y=0$ 与圆 $C:x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=5$ 相离"的

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 计算：$\frac{\sin 1100^\circ - 2\sin 100^\circ}{\cos 160^\circ}=$

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{3}$

8. 已知$\triangle ABC$中，$AB=3$，$AC=5$，$\angle BAC=120^\circ$，点D，E分别为线段AB，AC上靠近B，A的三等分点，点F为线段DE的中点，则$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}=$

A. $\frac{71}{9}$　　B. $\frac{61}{9}$　　C. $\frac{41}{9}$　　D. $\frac{31}{9}$

9. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{2x+3}{x-1}, x\leqslant 0,\\ x^2-x-3, x>0,\end{cases}$ 若函数$g(x)=f(x)-m$有两个不同的零点，则实数m的取值范围为

A. $(2,+\infty)$　　B. $\left(-\frac{15}{4},2\right)$　　C. $\left(-\frac{13}{4},+\infty\right)$　　D. $\left(-\frac{13}{4},2\right)$

10. 某工厂使用过滤仪器过滤排放的废气，过滤过程中体积一定的废气中的污染物浓度P(mg/L)与过滤时间t(h)之间的关系式为$P=P_0\cdot e^{-kt}$($P_0>0$，k为常数)，且根据以往的经验，前2个小时的过滤能够消除$\frac{1}{4}$的污染物.现有如下说法：①$k=\ln 2$；②经过1个小时的过滤后，能够消除$\frac{1}{5}$的污染物；③经过5个小时的过滤后，废气中剩余的污染物低于原来的$\frac{1}{2}$.则其中正确的个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

11. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的外接球表面积为27π，点E为棱BB_1的中点，且$DE\perp$平面α，点$C_1\in$平面α，则平面α截正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$所得的截面图形的面积为

A. $\frac{81\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{81\sqrt{2}}{8}$　　C. $\frac{81}{4}$　　D. $\frac{81}{8}$

12. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{18}=1(a>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，且$4\overrightarrow{BF_2}+3\overrightarrow{F_2F_1}=\mathbf{0}$，点$A$在双曲线$C$的左支上，$\angle F_1AF_2$与$\angle F_1F_2A$的平分线的交点为$D$，若$BD\perp F_1F_2$，则点$B$到双曲线$C$的一条渐近线的距离为

A. $3\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知实数x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y\leqslant 3,\\ 3x-y\geqslant 0,\\ y\geqslant -1,\end{cases}$则目标函数$z=x+2y$的最大值为________.

14. 已知函数$f(x)=\log_9(x+3)$，$x\in[0,m]$，若$\forall x_1\in[0,m]$，$\exists x_2\in[0,m]$，使得$f(x_1)=\frac{1}{f(x_2)}$，则$m=$______.

15. 已知函数$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+1-m$在$\left[-\frac{3\pi}{4},0\right]$上有3个零点$x_1$，$x_2$，$x_3$，其中$x_1<x_2<x_3$，则$x_1+2x_2+x_3=$________.

16. 已知抛物线$C:x^2=2py(p>0)$的焦点F到准线l_1的距离为2，点M，N在抛物线C上，且M，N，F三点共线，若直线$l_2:(1+3\lambda)x+(2+4\lambda)y+14\lambda+7=0$过定点$A$，且$\angle ANM=90^\circ$，则点$A$的坐标为________，点$M$到原点$O$的距离为________.(本题第一空2分，第二空3分)

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数 $f(x)=3\sin^2\frac{3}{2}x+a\sin 3x$ 的最大值为 $\frac{9}{2}$,其中 $a>0$.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求 $f(x)$ 在 $[\pi,2\pi]$ 上的单调递减区间.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $a_2=2a_1=6$, $\frac{a_{n+2}+4S_n+4a_n}{4}=S_{n+1}$.

(Ⅰ)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ)求数列 $\left\{\frac{8n+10}{3}\cdot a_{2n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. (12 分)

已知△ABC 中,点 M 在边 BC 上, $\angle MAC=\frac{\pi}{6}$, $AC=3$, $AM+MC=2\sqrt{3}$.

(Ⅰ)求证:△AMC 是等腰三角形;

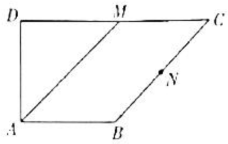
(Ⅱ)若 $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{5}$,求△$ABM$ 与△ACM 的面积之差.

20.（12 分）

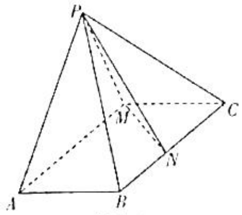
已知梯形 $ABCD$ 如图(1)所示，其中 $AB/\!/CD$，$\angle BAD=90°$，$\angle BCD=45°$，$CD=\sqrt{2}BC$，过点 A 作 BC 的平行线交线段 CD 于 M，点 N 为线段 BC 的中点. 现将 $\triangle DAM$ 沿 AM 进行翻折，使点 D 到达点 P 的位置，且平面 $PAM\perp$ 平面 AMC，得到的图形如图(2)所示.

（Ⅰ）求证：$AP\perp PN$；

（Ⅱ）若 $AB=2$，求点 C 到平面 PMN 的距离.



图(1)



图(2)

21.（12 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F，直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点.

（Ⅰ）若 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，且直线 l 的斜率为 4，求直线 OM（点 O 为坐标原点）的斜率.

（Ⅱ）若直线 FA，FB 的斜率互为相反数，且直线 l 不与 x 轴垂直，探究：直线 l 是否过定点？若是，求出该定点坐标；若不是，请说明理由.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-\sqrt{2}x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant 2-a\cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

天一大联考
2021—2022 学年高中毕业班阶段性测试(三)
文科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案 B

命题意图 本题考查集合的运算、函数的值域,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析 依题意,$A=\{y|-4\leqslant y\leqslant 2\}$,$\complement_{\mathbf{R}}B=\{y|y<-1\}$,故 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{y|-4\leqslant y<-1\}$.

2. 答案 C

命题意图 本题考查等差数列的基本运算,考查数学运算的核心素养.

解析 设$\{a_n\}$的公差为 d. 由题意可知 $5\times1+\frac{5\times(5-1)}{2}d=25$,解得 $d=2$,所以 $a_7=1+(7-1)\times2=13$.

3. 答案 B

命题意图 本题考查平面向量的概念、向量数量积的应用,考查数学运算的核心素养.

解析 依题意,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即 $6+\lambda=0$,解得 $\lambda=-6$,则 $\boldsymbol{b}=(2,-6)$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(5,-5)$,故$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$.

4. 答案 A

命题意图 本题考查基本不等式,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析 依题意,$4-2m=2n$,$4-2n=2m$,故$\frac{m}{4-2m}+\frac{2n}{2-n}=\frac{m}{2n}+\frac{2n}{m}\geqslant2\sqrt{\frac{m}{2n}\cdot\frac{2n}{m}}=2$,当且仅当$\frac{2n}{m}=\frac{m}{2n}$,即$m=\frac{4}{3}$,$n=\frac{2}{3}$时等号成立,故$\frac{m}{4-2m}+\frac{2n}{2-n}$的最小值为 2.

5. 答案 C

命题意图 本题考查三视图、空间几何体的体积,考查数学运算、直观想象的核心素养.

解析 设模型的体积为 V. 由三视图可知,该矛头模型是由一个圆锥与一个圆台拼接而成的组合体,故所求体积 $V=\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times6+\frac{1}{3}\times\pi\times(1^2+2^2+1\times2)\times4=\frac{52}{3}\pi$.

6. 答案 A

命题意图 本题考查充分条件与必要条件的判定、直线与圆的位置关系,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析 依题意,$|a|\geqslant4\Leftrightarrow a\leqslant-4$ 或 $a\geqslant4$. 若直线 $l:x-2y=0$ 与圆 $C:x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=5$ 相离,则$\frac{|0-a|}{\sqrt{1^2+2^2}}>\sqrt{5}$,解得 $a<-5$ 或 $a>5$. 故“$|a|\geqslant4$”是“直线 $l:x-2y=0$ 与圆 $C:x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=5$ 相离”的必要不充分条件.

7. 答案 B

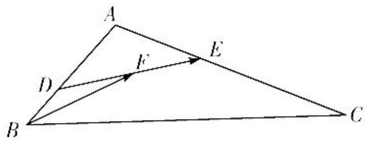
命题意图 本题考查三角函数的诱导公式、两角差的余弦公式,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析 依题意,$\frac{\sin1\,100^\circ-2\sin100^\circ}{\cos160^\circ}=\frac{2\cos10^\circ-\sin20^\circ}{\cos20^\circ}=\frac{2\cos(30^\circ-20^\circ)-\sin20^\circ}{\cos20^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cos20^\circ+\sin20^\circ-\sin20^\circ}{\cos20^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cos20^\circ}{\cos20^\circ}=\sqrt{3}$.

8. 答案　A

命题意图　本题考查平面向量的基本定理、向量的数量积,考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

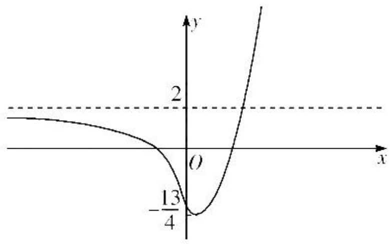
解析　作出图形如图所示,其中$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,故$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{18}\overrightarrow{AC}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}^2=\frac{25}{18}+\frac{5}{2}+4=\frac{71}{9}$.



9. 答案　D

命题意图　本题考查分段函数的图象与性质、函数的零点,考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析　当$x\leqslant 0$时,$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}=\frac{2x-2+5}{x-1}=2+\frac{5}{x-1}$,可知函数$f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递减.令$g(x)=0$,得$f(x)=m$.作出函数$f(x)$的大致图象如图所示,观察可知,$m\in\left(-\frac{13}{4},2\right)$.



10. 答案　B

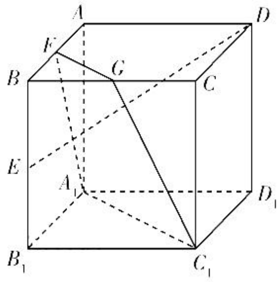
命题意图　本题考查函数模型的应用、指对数的运算,考查数学运算、数学建模、逻辑推理的核心素养.

解析　易知初始状态下,废气中的污染物浓度为P_0,则$\frac{3}{4}P_0=P_0\cdot e^{-2k}$,则$\frac{3}{4}=e^{-2k}$,解得$k=\ln 2-\frac{\ln 3}{2}$,故①错误;当$t=1$时,$P=P_0\cdot e^{\frac{\ln 3}{2}-\ln 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}P_0$,此时消除的污染物为原来的$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,故②错误;当$t=5$时,$P=P_0\cdot e^{5\left(\frac{\ln 3}{2}-\ln 2\right)}=P_0\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5=P_0\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{1}{2}P_0$,故③正确.

11. 答案　D

命题意图　本题考查空间线面的位置关系,考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

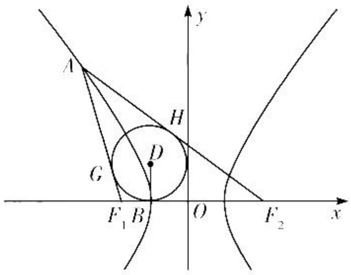
解析　作出图形如图所示.设该正方体外接球的半径为R,依题意,$4\pi R^2=27\pi$,解得$R^2=\frac{27}{4}$,故$R=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,故$AB=3$.分别取棱AB,BC的中点F,G,连接FG,A_1F,C_1G,A_1C_1,易证截面图形为等腰梯形C_1A_1FG,由题可知$FG=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,$A_1F=C_1G=\frac{3\sqrt{5}}{2}$,所以等腰梯形$C_1A_1FG$的高为$\frac{9\sqrt{2}}{4}$,故截面图形的面积为$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}\right)\times\frac{9\sqrt{2}}{4}=\frac{81}{8}$.



12. **答案** D

命题意图 本题考查平面向量与三角形的四心、双曲线的方程与几何性质，考查数学运算、数学建模、逻辑推理的核心素养.

解析 由题可知 D 为 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆圆心，点 B 在 x 轴上，且 F_1F_2 与内切圆 D 相切于点 B，作出大致图形，如图所示. 设直线 AF_1，AF_2 分别与圆 D 相切于 G，H，则 $|AG|=|AH|$，$|F_1G|=|F_1B|$，$|F_2B|=|F_2H|$. 因为 $|AF_2|-|AF_1|=2a$，所以 $|F_2H|-|F_1G|=2a$，即 $|F_2B|-|F_1B|=2a$，设 $B(x_0,0)$，则 $c-x_0-(c+x_0)=2a$，解得 $x_0=-a$. 因为 $4\overrightarrow{BF_2}+3\overrightarrow{F_2F_1}=\mathbf{0}$，故 $4(c-x_0)+3(-2c)=0$，故 $x_0=-\dfrac{c}{2}$，则 $c=2a$，故 $c^2=4a^2=a^2+b^2$，故 $3a^2=18$，解得 $a=\sqrt{6}$，故双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，则点 $B(-\sqrt{6},0)$ 到双曲线 C 的一条渐近线的距离为 $\dfrac{|\sqrt{3}\times\sqrt{6}|}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

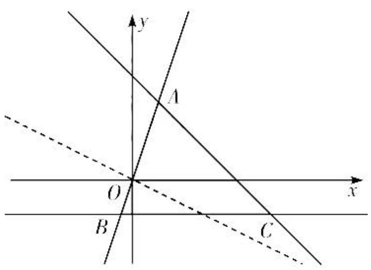


二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** $\dfrac{21}{4}$

命题意图 本题考查线性规划，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析 作出不等式组所表示的平面区域，如图中阴影部分所示. 观察可知，当直线 $z=x+2y$ 过点 A 时，z 有最大值. 联立 $\begin{cases}x+y=3,\\3x-y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{3}{4},\\y=\dfrac{9}{4},\end{cases}$ 故 z 的最大值为 $\dfrac{3}{4}+\dfrac{18}{4}=\dfrac{21}{4}$.



14. **答案** 78

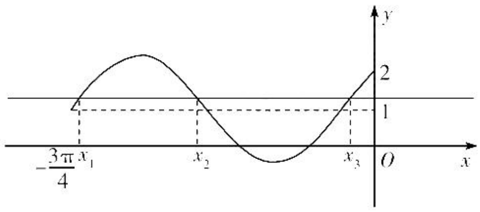
命题意图 本题考查函数的值域、对数的运算，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析 当 $x\in[0,6]$ 时，$f(x)=\log_9(x+3)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，因为 $\forall x_1\in[0,m]$，$\exists x_2\in[0,m]$，使得 $f(x_1)=\frac{1}{f(x_2)}$，故当 $x\in[6,m]$ 时，$f(x)\in[1,2]$ 即可，故 $\log_9(m+3)=2$，则 $m=78$.

15. **答案** $-\frac{5\pi}{3}$

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析 令 $f(x)=0$，故 $\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+1=m$. 作出函数 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+1$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4},0\right]$ 上的大致图象如图所示. 令 $3x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=-1$，得 $x=-\frac{\pi}{4}$，令 $k=-2$，得 $x=-\frac{7\pi}{12}$，则 $x_1+x_2=-\frac{\pi}{2}$，$x_2+x_3=-\frac{7\pi}{6}$，故 $x_1+2x_2+x_3=-\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{6}=-\frac{5\pi}{3}$.



16. **答案** $\left(0,-\frac{7}{2}\right)$；$2\sqrt{3}$

命题意图 本题考查直线的方程、抛物线的方程、直线与抛物线综合性问题，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析 依题意，直线 $l_2:(1+3\lambda)x+(2+4\lambda)y+14\lambda+7=0$，联立 $\begin{cases}x+2y+7=0,\\3x+4y+14=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=-\frac{7}{2},\end{cases}$ 故 $A\left(0,-\frac{7}{2}\right)$. 由题可知抛物线 $C:x^2=4y$，$F(0,1)$. 设直线 $MN:y=kx+1$，联立 $\begin{cases}x^2=4y,\\y=kx+1,\end{cases}$ 则 $x^2-4kx-4=0$，设 $M\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$，$N\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$，则 $x_1x_2=-4$. 而 $\angle ANM=90°$，则 $NF\perp AN$，故 $\overrightarrow{NF}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，故 $-x_2^2+\left(\frac{x_2^2}{4}+\frac{7}{2}\right)\left(1-\frac{x_2^2}{4}\right)=0$，则 $x_2^4+26x_2^2-56=0$，解得 $x_2^2=2$. 而 $x_1x_2=-4$，故 $x_1^2x_2^2=16$，则 $x_1^2=8$，故 $y_1=\frac{x_1^2}{4}=2$，则 $|MO|=\sqrt{8+4}=2\sqrt{3}$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查三角函数的图象与性质，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析 （Ⅰ）依题意，$f(x)=3\cdot\frac{1-\cos 3x}{2}+a\sin 3x=a\sin 3x-\frac{3}{2}\cos 3x+\frac{3}{2}$， ……………………（2 分）

故 $\sqrt{a^2+\frac{9}{4}}+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$，故 $\sqrt{a^2+\frac{9}{4}}=3$. ……………………（3 分）

因为 $a>0$，所以 $a=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………………（4 分）

（Ⅱ）依题意，$f(x)=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x\right)+\frac{3}{2}=3\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2}$. ……………………（5 分）

令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 3x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

解得$\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$. …………（7分）

令$k=1$，得$\frac{8\pi}{9}\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{9}$，令$k=2$，得$\frac{14\pi}{9}\leqslant x\leqslant\frac{17\pi}{9}$，

故$f(x)$在$[\pi,2\pi]$上的单调递减区间为$\left[\pi,\frac{11\pi}{9}\right]$和$\left[\frac{14\pi}{9},\frac{17\pi}{9}\right]$. …………（10分）

18. **命题意图** 本题考查等比数列的定义、错位相减法，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析 （Ⅰ）依题意，$a_{n+2}+4S_n+4a_n=4S_{n+1}$，故$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$，

则$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$. …………（2分）

因为$a_2=2a_1=6$，所以$a_2-2a_1=0$.

所以$a_{n+1}-2a_n=0$，即数列$\{a_n\}$是首项为3，公比为2的等比数列. …………（4分）

故$a_n=3\cdot 2^{n-1}$. …………（6分）

（Ⅱ）依题意，$\frac{8n+10}{3}\cdot a_{2n}=(4n+5)\cdot 4^n$， …………（8分）

故$T_n=9\cdot 4^1+13\cdot 4^2+17\cdot 4^3+\cdots+(4n+5)\cdot 4^n$，

$4T_n=9\cdot 4^2+13\cdot 4^3+17\cdot 4^4+\cdots+(4n+5)\cdot 4^{n+1}$， …………（9分）

两式相减可得，$-3T_n=9\cdot 4^1+4\cdot 4^2+4\cdot 4^3+\cdots+4\cdot 4^n-(4n+5)\cdot 4^{n+1}$

$=4\cdot 4^1+4\cdot 4^2+4\cdot 4^3+\cdots+4\cdot 4^n-(4n+5)\cdot 4^{n+1}+20$ …………（10分）

$=\frac{16(4^n-1)}{4-1}-(4n+5)\cdot 4^{n+1}+20$

$=-\left(4n+\frac{11}{3}\right)4^{n+1}+\frac{44}{3}$. …………（11分）

故$T_n=\left(\frac{4n}{3}+\frac{11}{9}\right)4^{n+1}-\frac{44}{9}$. …………（12分）

19. **命题意图** 本题考查正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式、三角恒等变换，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析 （Ⅰ）在$\triangle AMC$中，由余弦定理可得$CM^2=AM^2+AC^2-2AM\cdot AC\cdot\cos\angle MAC$，① …………（2分）

又$AM+MC=2\sqrt{3}$，② …………（3分）

联立①②解得$AM=MC=\sqrt{3}$，故$\triangle AMC$是等腰三角形. …………（4分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，$\angle AMC=\frac{2\pi}{3}$，故$\angle AMB=\frac{\pi}{3}$. …………（5分）

因为$\begin{cases}\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sqrt{3}}{5},\\ \sin^2B+\cos^2B=1,\end{cases}$故$\sin B=\frac{\sqrt{21}}{14}$，$\cos B=\frac{5\sqrt{7}}{14}$. …………（7分）

在$\triangle AMB$中，由正弦定理可得$\frac{AB}{\sin\angle AMB}=\frac{AM}{\sin B}$，故$AB=\sqrt{21}$， …………（8分）

由余弦定理可得$AB^2=AM^2+MB^2-2AM\cdot MB\cdot\cos\angle AMB$，

则$MB^2-\sqrt{3}MB-18=0$，解得$MB=3\sqrt{3}$. …………（10分）

故$\triangle AMB$的面积为$\frac{1}{2}\cdot AM\cdot BM\cdot\sin\angle AMB=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，

$\triangle AMC$ 的面积为$\frac{1}{2}\cdot AM\cdot CM\cdot\sin\angle AMC=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

故$\triangle ABM$与$\triangle ACM$的面积之差为$\frac{9\sqrt{3}}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查空间线面的位置关系、空间几何体的体积，考查直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

解析 （Ⅰ）如图，在平面图形中，连接 BD 交 AM 于 O，连接 MN.

因为 $BC/\!/AM$，$AB/\!/CM$，所以四边形 $ABCM$ 为平行四边形，所以 $AB=CM$. ……………………………（1 分）

在$\triangle CBD$中，由余弦定理，得 $BD^2=CD^2+CB^2-2CD\cdot CB\cdot\cos\angle BCD=CB^2$，

所以 $CB=BD$，则 $CB^2+BD^2=CD^2$，故$\angle CBD=90°$， ………………………………………………（2 分）

则$\angle ABD=45°$，则 $AB=AD=\frac{\sqrt{2}}{2}BD=\frac{1}{2}CD$，故 $CM=DM$.

因为 M,N 分别为 CD,BC 的中点，所以 $MN/\!/BD$，所以 $MN\perp AM$. ……………………………………（3 分）

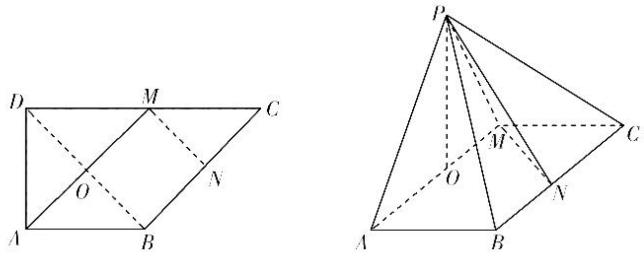
在立体图形中，连接 MN. 因为平面 $PAM\perp$平面 AMC，且平面 $PAM\cap$平面 $AMC=AM$，$MN\subset$平面 $ABCM$，

故 $MN\perp$平面 PAM. ……………………………………………………………………………………（4 分）

因为 $PA\subset$平面 PAM，故 $PA\perp MN$.

又 $AP\perp MP$，$MN\cap MP=M$，故 $AP\perp$平面 PMN. ………………………………………………（5 分）

而 $PN\subset$平面 PMN，故 $AP\perp PN$. ……………………………………………………………（6 分）



（Ⅱ）如图，取 AM 的中点 O，连接 PO.

由（Ⅰ）可知 $AP=PM$，则 $PO\perp AM$，

又平面 $PAM\perp$平面 AMC，且平面 $PAM\cap$平面 $AMC=AM$，

所以 $PO\perp$平面 AMC. ……………………………………………………………………………（7 分）

又 $AB=2$，所以点 P 到平面 MNC 的距离为 $PO=\sqrt{2}$，$S_{\triangle MNC}=1$，

所以 $V_{P-MNC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle MNC}\cdot PO=\frac{\sqrt{2}}{3}$. ………………………………………………（9 分）

由（Ⅰ）可知，$MN\perp PM$，且 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2=\sqrt{2}$. ……………………………（10 分）

设点 C 到平面 PMN 的距离为 h.

因为 $V_{P-MNC}=V_{C-PMN}$，即$\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times h$，所以 $h=1$，

即点 C 到平面 PMN 的距离为 1. ………………………………………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查椭圆的方程、中点弦问题、直线与椭圆的综合性问题，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

（Ⅰ）依题意，M 为线段 AB 的中点.

因为 A,B 在椭圆 C 上，故 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1,\\ \dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}=1,\end{cases}$ ……………………（1 分）

两式相减可得 $\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{3}=0$，……………………（3 分）

则 $\dfrac{3}{4}+\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=0$，

故 $\dfrac{3}{4}+4k_{OM}=0$，解得 $k_{OM}=-\dfrac{3}{16}$. ……………………（5 分）

（Ⅱ）假设定点存在，根据椭圆对称性，可知该直线所过定点在 x 轴上，设定点坐标为 $(t,0)$，

则直线 l 的方程为 $y=k(x-t)$，

联立 $\begin{cases}y=k(x-t),\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(3+4k^2)x^2-8k^2tx+4k^2t^2-12=0$，……………………（7 分）

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2t}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2t^2-12}{3+4k^2}$. ……………………（8 分）

设直线 FA,FB 的斜率分别为 k_1,k_2，由题可知 $F(1,0)$，

$$\begin{aligned}\text{则 } k_1+k_2&=\frac{y_1}{x_1-1}+\frac{y_2}{x_2-1}\\&=\frac{k(x_1-t)}{x_1-1}+\frac{k(x_2-t)}{x_2-1}\\&=k\frac{(x_1-t)(x_2-1)+(x_2-t)(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}\\&=k\frac{2x_1x_2-(t+1)(x_1+x_2)+2t}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}\\&=0.\end{aligned}$$ ……………………（10 分）

即 $2\cdot\dfrac{4k^2t^2-12}{3+4k^2}-(t+1)\dfrac{8k^2t}{3+4k^2}+2t=\dfrac{8k^2t^2-24-8k^2t^2-8k^2t+6t+8k^2t}{3+4k^2}=0$，

所以 $-24+6t=0$，$t=4$，

即直线 l 过定点 $(4,0)$. ……………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析 （Ⅰ）依题意，$x\in\mathbf{R}$，$f'(x)=e^x-\sqrt{2}$，……………………（1 分）

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{2}\ln 2$.

因为当 $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$ 时，$f'(x)<0$，

当 $x\in\left(\dfrac{1}{2}\ln 2,+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，……………………（3 分）

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$，单调递增区间为 $\left(\dfrac{1}{2}\ln 2,+\infty\right)$. ……………………（4 分）

（Ⅱ）依题意，$f(x)\geqslant 2-a\cos x\Leftrightarrow e^x-\sqrt{2}x+a\cos x-2\geqslant 0$，

令 $g(x)=e^{x}-\sqrt{2}x+a\cos x-2$，则 $g(0)=1+a-2\geqslant 0$，故 $a\geqslant 1$. …………………………………………（5 分）

下面证明当 $a\geqslant 1$ 时，$g(x)\geqslant 0$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上恒成立.

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 时，$0\leqslant\cos x\leqslant 1$，

所以当 $a\geqslant 1$ 时，$g(x)\geqslant e^{x}+\cos x-\sqrt{2}x-2$. ……………………………………………………（6 分）

令 $h(x)=e^{x}+\cos x-\sqrt{2}x-2, x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，

则 $h'(x)=e^{x}-\sin x-\sqrt{2}$，令 $\varphi(x)=e^{x}-\sin x-\sqrt{2}$，则 $\varphi'(x)=e^{x}-\cos x$. ……………………………（7 分）

令 $m(x)=e^{x}-\cos x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，

而 $m'(x)=e^{x}+\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上单调递增，

又 $m'\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{-\frac{\pi}{3}}+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{-\frac{\pi}{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}<e^{-1}-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，

所以 $\varphi'(x)=e^{x}-\cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减，……………………………………………………（8 分）

又 $\varphi'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}>0$，

$\varphi'\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{-\frac{\pi}{3}}-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{-\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{2}<e^{-1}-\frac{1}{2}<0$，…………………………………………（9 分）

所以存在 $x_1\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$，使得 $\varphi'(x_1)=0$.

因为当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},x_1\right)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$h'(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_1,0)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$h'(x)$ 单调递减，所以 $x=x_1$ 时，$h'(x)$ 取得最大值，且 $[h'(x)]_{\max}=h'(x_1)$，因为 $\varphi'(x_1)=0$，故 $e^{x_1}=\cos x_1$. ……………………………（10 分）

所以 $[h'(x)]_{\max}=h'(x_1)=\cos x_1-\sin x_1-\sqrt{2}=\sqrt{2}\cos\left(x_1+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\leqslant 0$，………………………………（11 分）

所以 $h(x)$ 单调递减，故当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 时，$h(x)\geqslant h(0)=0$，即 $g(x)\geqslant 0$ 恒成立.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$. ……………………………………………………………（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。