九江市2023年第二次高考模拟统一考试

数 学 试 题（文科）

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分.全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟.

考生注意：

1.答题前，考生务必将自己的准考证号、姓名等内容填写在答题卡上.

2.第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，第 II 卷用黑色签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上作答，答案无效.

第 I 卷（选择题 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知复数 z 满足 $\mathrm{i}z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，则 $z^2=$(C)

A. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　B. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　C. $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　D. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

解：$\because z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\therefore z^2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，故选 C.

2.已知集合 $A=\{x\mid x\geq 0\}$，$B=\{x\mid y=\ln(x-\dfrac{1}{x})\}$，则 $(\complement_{\mathrm{R}}A)\cap B=$(A)

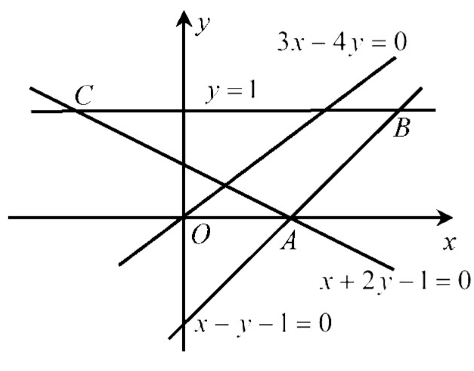
A. $(-1,0)$　　B. $(-\infty,0)$　　C. $(-2,-1)$　　D. $(-\infty,-1)$

解：$\because \complement_{\mathrm{R}}A=\{x\mid x<0\}$，$B=\{x\mid -1<x<0或x>1\}$，$\therefore (\complement_{\mathrm{R}}A)\cap B=\{x\mid -1<x<0\}$，故选 A.

3.已知实数 x,y 满足条件 $\begin{cases}x+2y\geq 1\\ x-y\leq 1\\ y-1\leq 0\end{cases}$，则 $z=3x-4y$ 的最大值为(D)

A. -7　　B. 1

C. 2　　D. 3



解:作出不等式组 $\begin{cases}x+2y\geq 1\\ x-y\leq 1\\ y-1\leq 0\end{cases}$ 表示的平面区域，如图所示，

平移直线 $l_0:3x-4y=0$，当过点 $A(1,0)$ 时，$z_{\max}=3$，故选 D.

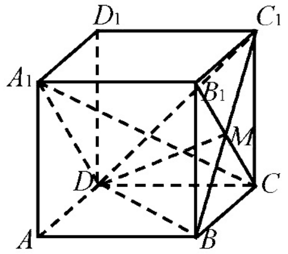
4.已知命题 $p:\exists x\in\mathrm{R},x^2+2x+2-a<0$，若 p 为假命题，则实数 a 的取值范围为(D)

A. $(1,+\infty)$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,1]$

解：依题意，得 $\Delta=4-4(2-a)\leq 0$，$\therefore a\leq 1$，故选 D.

5.正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是 BC_1 的中点，则直线 DM 与 A_1C 的位置关系是(B)

A. 异面垂直　　　　　B. 相交垂直　　　　　C. 异面不垂直　　　　　D. 相交不垂直

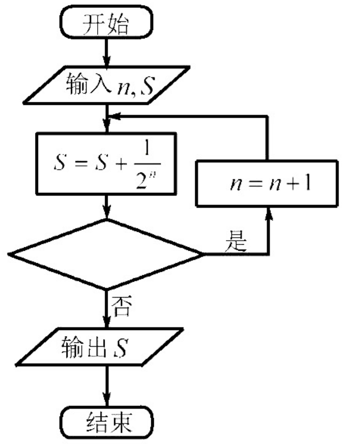


解：连接 BD，C_1D，易知 $A_1C\perp$ 平面 BDC_1，$\therefore DM\perp A_1C$，

连接 A_1D，B_1C，则 $A_1D//B_1C$，$\because M$ 是 BC_1 的中点，$\therefore M$ 是 B_1C 的中点，

$\therefore$ 直线 DM 与 A_1C 相交. 故选 B.

6. 执行右边的程序框图，如果输入的是 $n=1,S=0$，输出的结果为 $\dfrac{4095}{4096}$，



则判断框中“◇”应填入的是(C)

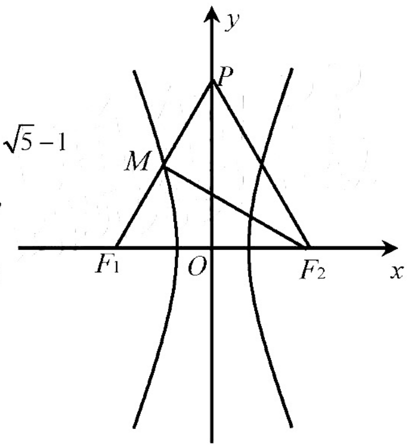
A. $n<13$　　　　　　　　　　B. $n>12$

C. $n<12$　　　　　　　　　　D. $n<11$

解：执行循环体后，当 $n=12$ 时，$S=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{12}}=\dfrac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^{12}]}{1-\frac{1}{2}}$

$=1-(\dfrac{1}{2})^{12}=\dfrac{4095}{4096}$，故选 C.

7. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a,b>0$）的左右焦点分别为 F_1,F_2，M 是双曲线 C 左支上一点，



且 $MF_1\perp MF_2$，点 F_1 关于点 M 对称的点在 y 轴上，则 C 的离心率为(A)

A. $\sqrt{3}+1$　　　　B. $\sqrt{2}+1$　　　　C. $\sqrt{5}+1$　　　　D. $\sqrt{5}-1$

解：设点 F_1 关于点 M 对称的点为 P，连接 PF_2，则 $\triangle PF_1F_2$ 为正三角形，

$\therefore \angle MF_2F_1=30^\circ$. 又 $|F_1F_2|=2c$，$\therefore |MF_1|=c$，$|MF_2|=\sqrt{3}c$，由双曲线

的定义知 $2a=\sqrt{3}c-c$，解得 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$，故选 A.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=\dfrac{1}{(n+1)^2-1}$，则其前 8 项和为(D)

A. $\dfrac{9}{10}$　　　　B. $\dfrac{9}{20}$　　　　C. $\dfrac{58}{45}$　　　　D. $\dfrac{29}{45}$

解：$\because a_n=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为

$S_n=\dfrac{1}{2}[(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4})+\cdots+(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1})+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})]=\dfrac{1}{2}(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2})$，

$\therefore S_8=\dfrac{1}{2}(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{10})=\dfrac{29}{45}$，故选 D.

9. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(-1)=0$，则关于 x 的不等式 $xf(x)<0$ 的解集为(A)

A. $(-1,0)\cup(0,1)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$　C. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　D. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

解：因为 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(-1)=0$，则 $f(1)=0$，又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，且当 $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ 时，$f(x)<0$；当 $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$.

$\therefore xf(x)<0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\f(x)<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\f(x)>0.\end{cases}$ $\therefore x\in(-1,0)\cup(0,1)$. 故选 A.

10. 已知函数 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{4})+|\sin(x-\frac{\pi}{4})|$，则下列结论正确的是（B）

A. $f(x)$ 周期为 π，在 $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}]$ 上单调递减　　B. $f(x)$ 周期为 2π，在 $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}]$ 上单调递减

C. $f(x)$ 周期为 π，在 $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}]$ 上单调递增　　D. $f(x)$ 周期为 2π，在 $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}]$ 上单调递增

解：$\because f(x+\pi)=-\sin(x+\frac{\pi}{4})+|\sin(x-\frac{\pi}{4})|\neq f(x)$，$f(x+2\pi)=\sin(x+\frac{\pi}{4})+|\sin(x-\frac{\pi}{4})|=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 周期为 2π.

$\because$ 当 $2k\pi-\frac{3\pi}{4}\le x\le 2k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in Z$ 时，$\sin(x-\frac{\pi}{4})\le 0$，$\therefore f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{4})-\sin(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos x$，

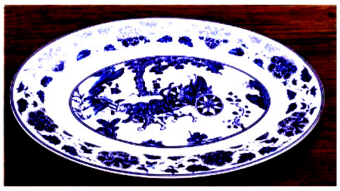
此时 $f(x)$ 在 $[2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi]$，$k\in Z$ 上单调递增，$[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{4}]$，$k\in Z$ 上单调递减，

$\because$ 当 $2k\pi+\frac{\pi}{4}\le x\le 2k\pi+\frac{5\pi}{4}$，$k\in Z$ 时，$\sin(x-\frac{\pi}{4})\ge 0$，$\therefore f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin x$，

此时 $f(x)$ 在 $[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$，$k\in Z$ 上单调递增，$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{5\pi}{4}]$，$k\in Z$ 上单调递减，

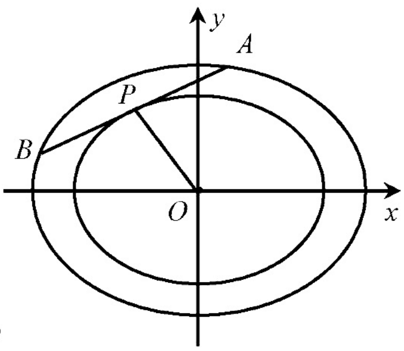
$\therefore f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}]$ 上单调递减，故选 B.

11. 青花瓷又称白地青花瓷，常简称青花，中华陶瓷烧制工艺的珍品，是中国瓷器的主流品种之一，属釉下彩瓷. 如图为青花瓷大盘，盘子的边缘有一定的宽度且与桌面水平，可以近似看成由大小两个椭圆围成. 经测量发现两椭圆的长轴长之比与短轴长之比相等. 现不慎掉落一根质地均匀的长筷子在盘面上，恰巧与小椭圆相切，设切点为 P，盘子的中心为 O，筷子与大椭圆的两交点为 A,B，点 A 关于 O



的对称点为 C. 给出下列四个命题：①两椭圆的焦距长相等；②两椭圆的离心率相等；③ $|PA|=|PB|$；④ BC 与小椭圆相切. 其中正确的个数是(B)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



解：设大小椭圆的长轴长之比与短轴长之比均为 $\sqrt{\lambda}$（$\lambda>1$），

$P(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

建立如图空间直角坐标系，设小椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$c=\sqrt{a^2-b^2}$），

则大椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda$.

①大椭圆的焦距长为$2\sqrt{\lambda a^2-\lambda b^2}=2\sqrt{\lambda}c>2c$，两椭圆的焦距长不相等，①错误；

②大椭圆的离心率$e=\dfrac{\sqrt{\lambda a^2-\lambda b^2}}{\sqrt{\lambda}a}=\dfrac{c}{a}$，两椭圆的离心率相等，②正确；

③直线AB：$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$，

由$\begin{cases}\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda,\end{cases}$ 消去y整理得$(b^2+\dfrac{b^4{x_0}^2}{a^2{y_0}^2})x^2-\dfrac{2b^4x_0}{{y_0}^2}x+\dfrac{a^2b^4}{{y_0}^2}-\lambda a^2b^2=0$，

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{\dfrac{2b^4x_0}{{y_0}^2}}{b^2+\dfrac{b^4{x_0}^2}{a^2{y_0}^2}}=\dfrac{2a^2b^2x_0}{a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2}=\dfrac{2a^2b^2x_0}{a^2b^2}=2x_0$，即$\dfrac{x_1+x_2}{2}=x_0$，线段$AB$的中点即为点$P$，

$\therefore |PA|=|PB|$，③正确.

④当$P(0,b)$时，则$A(\sqrt{\lambda-1}a,b)$，$B(-\sqrt{\lambda-1}a,b)$，$C(-\sqrt{\lambda-1}a,-b)$.若$\lambda\neq 2$，则BC与小椭圆不相切，④错误.

故选B.

12. 设$a=\sin\dfrac{1}{2}$，$b=\sqrt{e}-1$，$c=\ln\dfrac{3}{2}$，则a,b,c的大小关系为(B)

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $b>c>a$　　D. $c>b>a$

解:将$\dfrac{1}{2}$用变量x替代，则$a=\sin x$，$b=e^x-1$，$c=\ln(x+1)$，其中$x\in(0,1)$，

易证$e^x-1>x>\sin x$，$\therefore b>a$，

令$f(x)=\sin x-\ln(x+1)$，则$f'(x)=\cos x-\dfrac{1}{x+1}$，$f''(x)=-\sin x+\dfrac{1}{(x+1)^2}$，

易知$f''(x)$在$(0,1)$上单调递减，且$f''(0)=1>0$，$f''(1)=\dfrac{1}{4}-\sin 1<0$，$\therefore \exists x_0\in(0,1)$，使得$f''(x_0)=0$，

当$x\in(0,x_0)$时，$f''(x)>0$，$f'(x)$单调递增；当$x\in(x_0,1)$时，$f''(x)<0$，$f'(x)$单调递减.

又$f'(0)=0$，$f'(1)=\cos 1-\dfrac{1}{2}>0$，$\therefore f'(x)>0$，$\therefore f(x)$在$(0,1)$上单调递增，

$\therefore f(x) > f(0) = 0$，即$\sin x > \ln(x+1)$，$\therefore a > c$，

综上，$b > a > c$，故选 B.

第Ⅱ卷（非选择题 90 分）

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22-23 题为选考题，学生根据要求作答.

二、填空题:本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}=(1,2)$，且$\boldsymbol{a} \perp (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \underline{\quad 5 \quad}$.

解：由$\boldsymbol{a} \perp (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$知$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = 0$，$\therefore \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^2 = |\boldsymbol{a}|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$.

14. 从边长为1的正六边形的各个顶点中，任取两个连成线段，则该线段长度为2的概率为$\underline{\dfrac{1}{5}}$.

解：连接正六边形的任意两个顶点，共可连成 15 条线段，其中长度为 2 的线段有 3 条，故其概率为$\dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$.

15. 函数$f(x) = 4\sin\dfrac{\pi}{2}x - |x-1|$的所有零点之和为$\underline{\quad 6 \quad}$.

解：令$f(x)=0$，得$4\sin\dfrac{\pi}{2}x = |x-1|$，问题等价于函数$y = 4\sin\dfrac{\pi}{2}x$与$y=|x-1|$图象的所有交点的横坐标之和，$\because$两函数的图象关于直线$x=1$对称，且有且仅有 6 个交点$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_6,y_6)$，

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{6} x_i = 3 \times 2 = 6$.

16. 根据祖暅原理，界于两个平行平面之间的两个几何体，被任一平行于这两个平面的平面所截，如果两个截面的面积相等，则这两个几何体的体积相等. 如图 1 所示，一个容器是半径为R的半球，另一个容器是底面半径和高均为R的圆柱内嵌一个底面半径和高均为R的圆锥，这两个容器的容积相等. 若将这两容器置于同一平面，注入等体积的水，则其水面高度也相同. 如图 2，一个圆柱形容器的底面半径为$4\,\text{cm}$，高为$10\,\text{cm}$，里面注入高为$1\,\text{cm}$的水，将一个半径为$4\,\text{cm}$的实心球缓慢放入容器内，当球沉到容器底端时，水面的高度为$\underline{\quad 1.48 \quad}\,\text{cm}$.（注：$\sqrt[3]{2} \approx 1.26$）

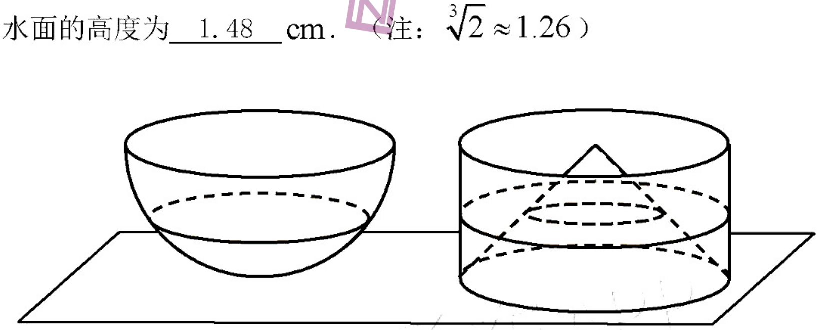


图 1

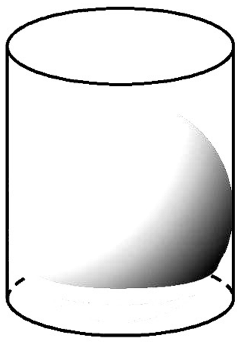


图 2

解：设铁球沉到容器底端时，水面的高度为h. 由图 2 知，容器内水的体积加上球在水面下的部分体积等于圆柱的体积，由图 1 知相应圆台的体积加上球在水面下的部分体积也等于相应圆柱的体积，故容器内水的体积等于相应圆台的体积. $\because$容器内水的体积为$V_{水} = \pi \times 4^2 \times 1 = 16\pi$，相应圆台的体积为

$\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times4-\frac{1}{3}\times\pi\times(4-h)^2\times(4-h)=\frac{64\pi}{3}-\frac{(4-h)^3\pi}{3}$，$\therefore 16\pi=\frac{64\pi}{3}-\frac{(4-h)^3\pi}{3}$，解得

$h=4-\sqrt[3]{16}=4-2\sqrt[3]{2}\approx4-2\times1.26=1.48\text{cm}$.

三、解答题:本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

九江市正在创建第七届全国文明城市，某中学为了增强学生对九江创文的了解和重视，组织全校高三学生进行了“创文知多少”知识竞赛（满分 100），现从中随机抽取了文科生、理科生各 100 名同学，统计他们的知识竞赛成绩分布如下：

	$[0,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100]$
文科生	1	16	23	44	16
理科生	9	24	27	32	8
合计	10	40	50	76	24

(1) 在得分小于 80 分的学生样本中,按文理科类分层抽样抽取 5 名学生.

①求抽取的 5 名学生中文科生、理科生各多少人;

②从这 5 名学生中随机抽取 2 名学生,求抽取的 2 名学生中至少有一名文科生的概率.

(2) 如果得分大于等于 80 分可获“创文竞赛优秀奖”,能否有99.9%的把握认为获“创文竞赛优秀奖”与文理科类有关?

参考数据：

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

解：(1)①得分小于 80 分的学生中，文科生与理科生人数分别为：40 和 60，比例为$2:3$………2 分

所以抽取的 5 人中，文科生 2 人，理科生 3 人………3 分

②这 5 名学生有 2 人是文科生，记作a_1,a_2，3 人是理科生，记作b_1,b_2,b_3，随机抽取两名同学可能的情况有 10 种：(a_1,a_2)，(a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_1,b_3)，(a_2,b_1)，(a_2,b_2)，(a_2,b_3)，(b_1,b_2)，(b_1,b_3)，(b_2,b_3)

………4 分

其中至少有一名文科生情况有 7 种:(a_1,a_2)，(a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_1,b_3)，(a_2,b_1)，(a_2,b_2)，(a_2,b_3)

………5 分

因此抽取的 2 名学生至少有一名文科生的概率为$P=\frac{7}{10}$………6 分

(2) 由题中数据可得如下2×2列联表：

	创文竞赛优秀奖	未获优秀奖	总计
文科生	60	40	100
理科生	40	60	100
总计	100	100	200

………9 分

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{200(60\times60-40\times40)^2}{100\times100\times100\times100}=8<10.828$ ………11 分

所以没有 99.9% 的把握认为获“创文竞赛优秀奖”与文理科类有关………12 分

18.（本小题满分 12 分）

在锐角$\triangle ABC$中，角A, B, C所对的边为a,b,c，已知$(a-b+c)(a-b-c)+ab=0$，

$bc\sin C=3c\cos A+3a\cos C$，

(1) 求c；

(2) 求$a+b$的取值范围.

解：(1) 由$(a-b+c)(a-b-c)+ab=0$，得$a^2+b^2-c^2=ab$ ………2 分

由余弦定理得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$ ………3 分

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$ ………4 分

由正弦定理及$bc\sin C=3c\cos A+3a\cos C$，得$c\sin B\sin C=3\sin C\cos A+3\sin A\cos C=3\sin B$ ………5 分

$\because \sin B\neq0$，$\therefore c\sin C=3$，又$C=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore c\sin\dfrac{\pi}{3}=3$，解得$c=2\sqrt{3}$ ………6 分

(2) 由正弦定理可得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$，即$a=4\sin A$，$b=4\sin B$ ………7 分

$\therefore a+b=4(\sin A+\sin B)=4[\sin A+\sin(\dfrac{2\pi}{3}-A)]=4(\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A)=4\sqrt{3}\sin(A+\dfrac{\pi}{6})$

………10 分

$\because\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<\dfrac{2\pi}{3}-A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，$\therefore\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore A+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3})$，$\therefore\sin(A+\dfrac{\pi}{6})\in(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1]$ ………11 分

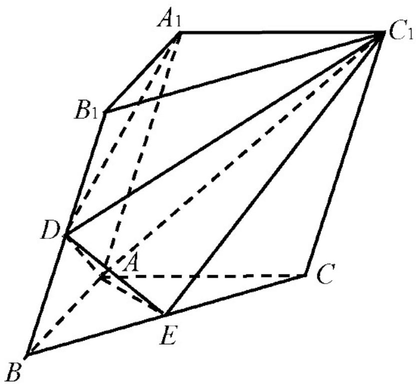
$\therefore a+b\in(6,4\sqrt{3}]$ ………12 分

19.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp$ 平面 AA_1B_1B，$\angle ABB_1=\dfrac{\pi}{3}$，$AB=1$，$AC=AA_1=2$，$D$ 为棱 BB_1 的中点.

(1) 求证：$AD\perp$ 平面 A_1C_1D；

(2) 若 E 为棱 BC 的中点，求三棱锥 $E-AC_1D$ 的体积.



证明：(1) $\because AC\perp$ 平面 AA_1B_1B，$AD\subsetneqq$ 平面 AA_1B_1B，$\therefore AC\perp AD$，

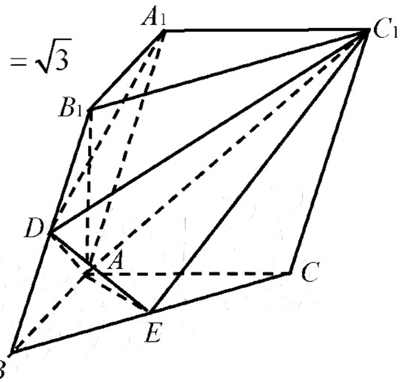
………1 分

$\because AC\parallel A_1C_1$，$\therefore A_1C_1\perp AD$ ………2 分

由已知得 $AB=BD=1$，$\angle ABD=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \angle ADB=\dfrac{\pi}{3}$，同理可得 $\angle A_1DB_1=\dfrac{\pi}{6}$ ………3 分

$\therefore \angle ADA_1=\pi-(\angle ADB+\angle A_1DB_1)=\dfrac{\pi}{2}$，即 $AD\perp A_1D$ ………4 分

又 $A_1D\cap A_1C_1=A_1$，$A_1D,A_1C_1\subsetneqq$ 平面 A_1C_1D，$\therefore AD\perp$ 平面 A_1C_1D ………5 分



解：(2) 连接 AB_1，$\because \angle ABB_1=\dfrac{\pi}{3}$，$AB=1$，$BB_1=2$，$\therefore AB_1\perp AB$，且 $AB_1=\sqrt{3}$

………6 分

$\because AC\perp$ 平面 AA_1B_1B，$\therefore AC\perp AB_1$，

$\because AC\cap AB=A$，$AC,AB\subsetneqq$ 平面 ABC，$\therefore AB_1\perp$ 平面 ABC ………7 分

$\because AB=1$，$AC=2$，$AB\perp AC$，

$\therefore$ 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V=\dfrac{1}{2}\times AB\times AC\times AB_1=\dfrac{1}{2}\times1\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$ ………8 分

$\because D,E$ 分别为 BB_1,BC 的中点，$\therefore V_{\text{三棱锥}E-ABD}=\dfrac{1}{12}V$ ………9 分

$V_{\text{四棱锥}C_1-AA_1B_1D}=\dfrac{3}{4}V_{\text{四棱锥}C_1-AA_1B_1B}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}V=\dfrac{1}{2}V$ ………10 分

$V_{\text{三棱锥}C_1-AEC}=\dfrac{1}{6}V$ ………11 分

$\therefore V_{\text{三棱锥}E-AC_1D}=V-\dfrac{1}{12}V-\dfrac{1}{2}V-\dfrac{1}{6}V=\dfrac{1}{4}V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ………12 分

20. (本小题满分 12 分)

已知 P 是抛物线 $E:x^2=2py$（$p>0$）上一动点，$Q(0,3)$ 是圆 $M:(x-1)^2+(y-m)^2=1$ 上一点，$|PQ|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求抛物线 E 的方程；

(2) $N(a,b)$ 是圆 M 内一点，直线 l 过点 N 且与直线 MN 垂直，l 与抛物线 C 相交于 A_1, A_2 两点，与圆 M 相交于 A_3, A_4 两点，且 $|A_1A_3| = |A_2A_4|$，当 $a+b$ 取最小值时，求直线 l 的方程.

解: (1) 设 $P(x_0, y_0)$，则 $x_0^2 = 2py_0$，

$|PQ| = \sqrt{x_0^2 + (y_0-3)^2} = \sqrt{2py_0 + (y_0-3)^2} = \sqrt{y_0^2 + (2p-6)y_0 + 9}$ ………1 分

若 $0 < p \le 3$，当 $y_0 = 3-p$ 时，$|PQ|_{\min} = \sqrt{6p-p^2} = 2\sqrt{2}$，解得 $p=2$ ………2 分

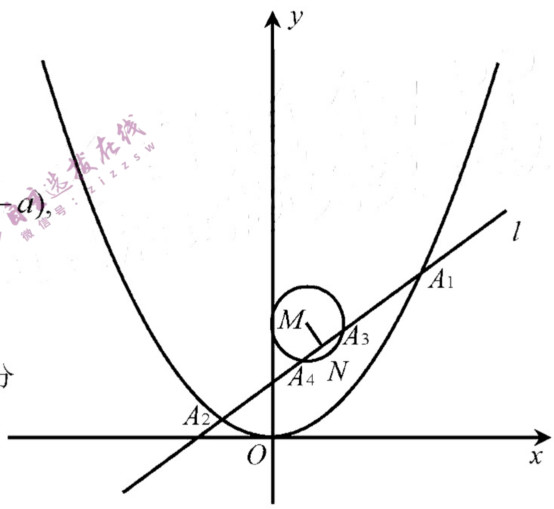
若 $p > 3$，当 $y_0 = 0$ 时，$|PQ|_{\min} = 3 \ne 2\sqrt{2}$ ………3 分

$\therefore$ 抛物线 E 的方程为 $x^2 = 4y$ ………4 分

(2) $\because Q(0,3)$ 是圆 $M: (x-1)^2 + (y-m)^2 = 1$ 上一点，$\therefore (0-1)^2 + (3-m)^2 = 1$，$m=3$，$\therefore M(1,3)$，

$\because N(a,b)$ 是圆 M 内一点，$\therefore 0 < a < 2$，$2 < b < 4$ ………5 分

由 $|A_1A_3| = |A_2A_4|$，知线段 A_1A_2 的中点与线段 A_3A_4 的中点重合，即 N 为线段 A_1A_2（A_3A_4）的中点 ………6 分



$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y - b = -\dfrac{a-1}{b-3}(x-a)$ ………7 分

设 $A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$，联立方程组 $\begin{cases} y - b = -\dfrac{a-1}{b-3}(x-a), \\ x^2 = 4y, \end{cases}$

消去 y 整理得 $x^2 + \dfrac{4(a-1)}{b-3}x - 4b - \dfrac{4a(a-1)}{b-3} = 0$ ………8 分

$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2} = -\dfrac{2(a-1)}{b-3} = a$，即 $b = 1 + \dfrac{2}{a}$ ………9 分

$\therefore a + b = 1 + \dfrac{2}{a} + a \ge 1 + 2\sqrt{\dfrac{2}{a}\cdot a} = 2\sqrt{2} + 1$，当且仅当 $a = \sqrt{2}$，$b = 1+\sqrt{2}$ 时取等号 ………10 分

此时 N 在圆 M 内，满足题意 ………11 分

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y - (1+\sqrt{2}) = -\dfrac{\sqrt{2}-1}{(1+\sqrt{2})-3}(x-\sqrt{2})$，即 $x - \sqrt{2}y + 2 = 0$ ………12 分

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^{x-a} - x - \sin x$，$a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 0$ 时，证明: $f(x) > 0$；

(2) 当 $a=1$ 时，判断 $f(x)$ 零点的个数并说明理由.

解: (1) 当 $a=0$ 时，$f(x)=e^{x}-x-\sin x \geqslant e^{x}-x-1$ ………1 分

令 $g(x)=e^{x}-x-1$，$g'(x)=e^{x}-1$ ………2 分

由 $g'(x)<0$，得 $x<0$；$g'(x)>0$，得 $x>0$ ………3 分

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增………4 分

$\therefore g(x) \geqslant g(0)=0$，由于 $f(0)=1$，$\therefore f(x)>0$ ………5 分

(2) 当 $a=1$ 时，$f(x)=e^{x-1}-x-\sin x$.

①当 $x\in(-\infty,0]$ 时，构造函数 $h(x)=x+\sin x$，$h'(x)=1+\cos x \geqslant 0$ ………6 分

$\therefore h(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增，$h(x)\leqslant h(0)=0$，$\therefore f(x)\geqslant e^{x-1}>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上无零点 ………7 分

②当 $x\in(0,\pi]$ 时，$f'(x)=e^{x-1}-1-\cos x$，显然 $f'(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上单调递增，

又 $f'(0)=e^{-1}-2<0$，$f'(\pi)=e^{\pi-1}>0$，$\therefore \exists x_0\in(0,\pi)$，使得 $f'(x_0)=0$ ………8 分

$\therefore f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 (x_0,π) 上单调递增，

又 $f(0)=e^{-1}>0$，$f(\pi)=e^{\pi-1}-\pi>0$，又 $f(1)=-\sin 1<0$ ………9 分

所以 $\exists x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,\pi)$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上有且仅有两个零点………10 分

③当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时，$f'(x)>e^{\pi-1}-2>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(\pi,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)>f(\pi)=e^{\pi-1}-\pi>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(\pi,+\infty)$ 上无零点………11 分

综上所述，$f(x)$ 有且只有两个零点………12 分

请考生在第 22-23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的方程为 $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+1=0$，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\cos\alpha} \\ y=\tan\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数）. 以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求直线 l 的极坐标方程和曲线 C 的普通方程；

(2) 设直线 $y=kx$（$k>0$）与曲线 C 相交于点 A,B，与直线 l 相交于点 C，求 $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}$

的最大值.

解:(1)令 $x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$，得 $\sqrt{2}\rho\cos\theta+\sqrt{2}\rho\sin\theta+1=0$，

即直线 l 的极坐标方程为 $\rho=-\dfrac{\sqrt{2}}{2(\sin\theta+\cos\theta)}$，即 $\rho=-\dfrac{1}{2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}$ ………2 分

$\because \dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1$，$\therefore x^2-y^2=1$，

即曲线 C 的普通方程为 $x^2-y^2=1$ ………5 分

(2)解法一：直线 $y=kx$（$k>0$）的极坐标方程为 $\theta=\alpha$（$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$）………6 分

设 $A(\rho_1,\alpha)$，则 $B(\rho_2,\pi+\alpha)$，$C(\rho_3,\pi+\alpha)$（$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$），

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{1}{\cos 2\alpha}$，$\therefore \rho_1{}^2=\rho_2{}^2=\dfrac{1}{\cos 2\alpha}$，

$\therefore \dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}=\dfrac{1}{\rho_1{}^2}+\dfrac{1}{\rho_2{}^2}=2\cos 2\alpha$ ………7 分

又 $\rho_3=\dfrac{\sqrt{2}}{2(\sin\alpha+\cos\alpha)}$，$\therefore \dfrac{1}{|OC|^2}=\dfrac{1}{\rho_3{}^2}=2(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=2+2\sin 2\alpha$ ………8 分

$\therefore \dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}=2+2\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha=2+2\sqrt{2}\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{4})$ ………9 分

$\therefore \dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}$ 的最大值为 $2+2\sqrt{2}$ ………10 分

解法二：联立方程组 $\begin{cases} y=kx, \\ x^2-y^2=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x^2=\dfrac{1}{1-k^2}, \\ y^2=\dfrac{k^2}{1-k^2}, \end{cases}$ 其中 $-1<k<1$ ………6 分

$\therefore |OA|^2=|OB|^2=x^2+y^2=\dfrac{1+k^2}{1-k^2}$ ………7 分

联立方程组 $\begin{cases} y=kx, \\ \sqrt{2}x+\sqrt{2}y+1=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}(1+k)}, \\ y=-\dfrac{k}{\sqrt{2}(1+k)}, \end{cases}$ $\therefore |OC|^2=\dfrac{1+k^2}{2(1+k)^2}$ ………8 分

$\therefore \dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}=\dfrac{2(1-k^2)}{1+k^2}+\dfrac{2(1+k)^2}{1+k^2}=\dfrac{4(1+k)}{1+k^2}$ ………9 分

令 $t=1+k(0<t<2)$，则 $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}=\dfrac{4t}{t^2-2t+2}=\dfrac{4}{t+\dfrac{2}{t}-2}\le 2+2\sqrt{2}$，

当且仅当 $t=\sqrt{2}$，即 $k=\sqrt{2}-1$ 时取等号，

即 $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}$ 的最大值为 $2+2\sqrt{2}$ ………10 分

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=2|x-1|+|x-a|$（$a\in\mathbf{R}$）.

(1) 若 $f(x)$ 的最小值为 1，求 a 的值；

(2) 若 $f(x)<a|x|+6$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解：(1) $\because |x-1|+|x-a|\ge|(x-1)-(x-a)|=|a-1|$，当且仅当 $(x-1)(x-a)\le 0$ 时，等号成立，

………2 分

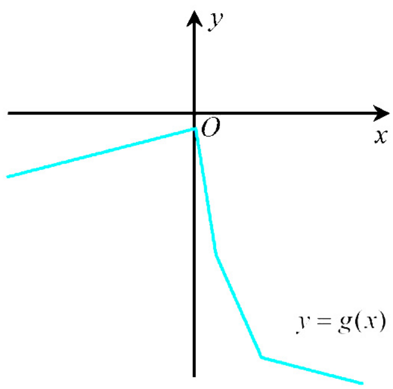
$\therefore f(x)=2|x-1|+|x-a|\ge|x-1|+|a-1|\ge|a-1|$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立………4 分

$\therefore |a-1|=1$，解得 $a=0$ 或 $a=2$ ………5 分

(2) 令 $g(x)=2|x-1|+|x-a|-a|x|-6$，依题意 $g(x)<0$ 恒成立.

当 $x\in\{x\mid x\ge 1 且 x\ge a\}$ 时，$g(x)=2(x-1)+(x-a)-ax-6=(3-a)x-a-8$ ………6 分

要使 $g(x)<0$ 恒成立，则必须 $3-a\le 0$，即 $a\ge 3$ ………7 分



当 $a\ge 3$ 时，$g(x)=\begin{cases}(a-3)x+a-4, & x<0,\\ -(a+3)x+a-4, & 0\le x<1,\\ (1-a)x+a-8, & 1\le x<a,\\ (3-a)x-a-8, & x\ge a.\end{cases}$ ………8 分

$\therefore g(x)\le g(0)=a-4<0$，$\therefore a<4$ ………9 分

综上所述，a 的取值范围是 $[3,4)$ ………10 分